CENTRO UNIVERSITARIO VILLANUEVA

Manual de:

Matemáticas Financieras

Curso 2017-2018

Pablo Díez Albert

Índice general

Capítulo 1

Conceptos básicos

1.1. Bienes económicos y actividad financiera

Los **bienes económicos** se caracterizan por satisfacer necesidades humanas y ser escasos respecto a su apetencia, por lo que tienen una utilidad que puede medirse en términos monetarios.

Los bienes económicos pueden clasificarse atendiendo a diversos criterios:

- Desde un punto de vista objetivo:
  - **Bienes materiales o físicos**: Denominados también activos reales.
  - **Bienes inmateriales o servicios**: Son bienes no materiales que satisfacen necesidades humanas.
- Desde un punto de vista subjetivo:
  - **Derechos**: Cuando la posición del agente económico es acreedora.
  - **Obligaciones**: Cuando la posición del agente económico es deudora.
- Desde una perspectiva temporal:
  - **Bienes presentes**.
  - **Bienes futuros**.

La **actividad económica** se caracteriza por la producción de bienes y servicios y por su intercambio entre los diversos agentes económicos. Frecuentemente, el intercambio se realiza entre activos reales y activos financieros, aunque también es usual el intercambio de activos financieros entre sí.

La **actividad financiera**, como parte de la actividad económica, aparece cuando el intercambio se realiza de forma no simultánea en el tiempo. Además de tener en cuenta la medida monetaria de cada activo, se ha de tener en cuenta el momento en que se toma posesión del mismo.

1.2. Capital financiero

De manera general, el capital financiero se entiende como la medida de un bien económico referida al momento de su disponibilidad. Dicho de una manera más precisa:

Definición 1.1 *El **capital financiero** es la medida de cualquier activo real o financiero, expresada por su **cuantía** y por su **vencimiento** o momento de disponibilidad.*

Como consecuencia, todo capital puede representarse por un par ordenado de números reales (C, t), donde:

- C mide la cuantía del capital expresada en la unidad monetaria con la que se está operando (euro, dólar, yen, ...).
- t es el momento en que está disponible el capital, o vencimiento del mismo. Como unidad se suele utilizar el año.

Los capitales pueden representarse gráficamente de diversas formas (véase Figura 1.1).

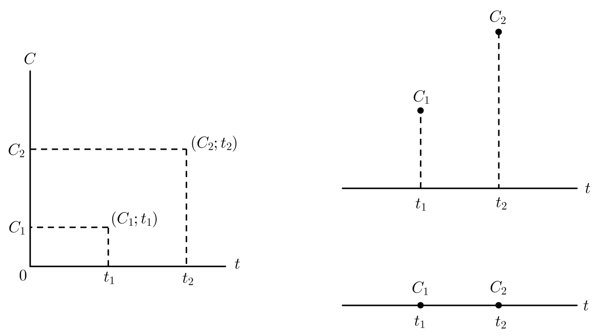

Figura 1.1: Representación gráfica del capital financiero.

Definición 1.2 *Se denomina **espacio financiero**, y se denota por E, al conjunto de todos los posibles capitales financieros:*

$$E = \{(C, t);\ C, t \in \mathbb{R}\}$$

Dentro del espacio financiero tienen lugar los fenómenos financieros y se realizan las **operaciones financieras**, que son nuestro objeto de estudio y consisten sencillamente en un intercambio no simultáneo de capitales financieros.

1.2.1. Comparación de capitales

Consideremos el caso en que se trata de comparar dos capitales cualesquiera (C_1, t_1) y (C_2, t_2) para ver cuál es preferible o si son indiferentes. Utilizaremos el símbolo $\succ$ para denotar la relación *es más preferido*, y $\prec$ para denotar *es menos preferido*. El simbolo $\sim$ denotará *indiferencia*.

- Si $C_1 = C_2$ y $t_1 < t_2 \Rightarrow (C_1, t_1) \succ (C_2, t_2)$. Es decir, entre dos capitales que tienen la misma cuantía, se prefiere el que tenga anterior vencimiento.
- Si $C_1 > C_2$ y $t_1 = t_2 \Rightarrow (C_1, t_1) \succ (C_2, t_2)$. Es decir, entre dos capitales que tienen el mismo vencimiento, se prefiere el de mayor cuantía.
- Si $C_1 < C_2$ y $t_1 < t_2$ no se puede afirmar de manera directa e inmediata cuál es preferible o si son indiferentes.

En el tercer caso, habrá que efectuar la comparación indirectamente, refiriendo ambos capitales a un mismo momento p del tiempo y después, bastará con comparar las cuantías de esos capitales sustitutos de los primeros.

Para referir cualquier capital al punto p de comparación se considera que el decisor financiero posee un **criterio de sustitución** de manera que ante cualquier capital $(C, t) \in E$ es capaz de señalar cuál es su sustituto o equivalente en p, es decir:

$$(C, t) \sim (V, p)$$

Por tanto, para comparar los capitales (C_1, t_1) y (C_2, t_2), primero se han de obtener los sustitutos en p de cada uno de ellos:

$$(C_1, t_1) \sim (V_1, p) \ ; \ (C_2, t_2) \sim (V_2, p)$$

y a continuación se decide:

- Si $V_1 < V_2 \Rightarrow (C_1, t_1) \prec (C_2, t_2)$. Es decir, que entre dos capitales cualesquiera, es preferido el que tiene mayor sustituto en p.
- Si $V_1 = V_2 \Rightarrow (C_1, t_1) \sim (C_2, t_2)$. Es decir, dos capitales que tienen el mismo sustituto en p son equivalentes.

Es importante destacar que las relaciones de equivalencia y preferencia dependen de cual sea el criterio racional de proyección en p, pero una vez fijado éste, la comparación de los capitales financieros, que son magnitudes bidimensionales, queda reducida a la comparación de las cuantías V, un vez homogeneizados los vencimientos en p.

1.3. Leyes financieras

Tal como se mencionaba en el apartado anterior, el decisor financiero posee un criterio de sustitución de cualquier capital (C, t) por otro equivalente (V, p) en el punto p de comparación.

Definición 1.3 *La expresión matemática del criterio de sustitución entre dos capitales* (C,t) *y* (V,p) *recibe el nombre de* ***ley financiera de valoración en p****, y se expresa:*

$$V = F(C,t;p)$$

Cuando $t < p$, la **ley financiera** es **de capitalización**, y se suele emplear la letra L:

$$V = L(C,t;p)$$

Cuando $t > p$, la **ley financiera** es **de descuento**, y se suele emplear la letra A:

$$V = A(C,t;p)$$

La consideración conjunta de ambas leyes constituye una **ley financiera completa** en p, y se expresa como:

$$V = F(C,t;p) = \begin{cases} L(C,t;p) & \textit{para } t \leq p \\ A(C,t;p) & \textit{para } t \geq p \end{cases}$$

Al variar p se obtienen leyes del mismo tipo o familia que reciben la denominación de **sistema financiero**.

1.3.1. Propiedades de las leyes financieras

Las leyes financieras son funciones matemáticas F que relacionan las variables C,t y p. A la función F se le ha de exigir el cumplimiento de algunas propiedades como consecuencia de la aceptación de ciertos principios económicos y de preferencia lógica. Estas propiedades son:

1. **La función F ha de ser positiva**

   $$V = F(C,t;p) > 0, \ \forall C \in \mathbb{R}^+$$

2. **La función F ha de ser homogénea de grado 1 respecto a C**

   $$F(C,t;p) = C \cdot F(1,t;p) = C \cdot F(t;p)$$

   donde $F(t;p)$ se conoce como **sistema financiero unitario** y será el tipo de sistema con el que trabajaremos de aquí en adelante. Para obtener el sustituto en p de una cuantía C, primero se halla el equivalente en p de una unidad monetaria y luego se multiplica ese resultado por C.

3. **Propiedad reflexiva de la equivalencia de capitales**

   Cuando t y p coinciden, cualquier capital ha de tener como equivalente a sí mismo. Se ha de verificar que:

$$t = p \Rightarrow \begin{cases} F(C, t; t) = F(C, p; p) = C \\ F(t; t) = F(p; p) = 1 \end{cases}$$

4. **Principio de subestimación de los capitales futuros respecto a los actuales de igual cuantía**

   Los agentes económicos se comportan de acuerdo con el principio de preferencia temporal de manera que, a igualdad de cuantía, se prefiere el capital que tenga anterior vencimiento. La admisión de este principio exige que la función financiera $F(t; p)$ sea creciente respecto a p y decreciente respecto a t, es decir:

$$\frac{\partial F(t;p)}{\partial t} < 0 \ ; \ \frac{\partial F(t;p)}{\partial p} > 0$$

5. **Continuidad respecto a t y p**

   Puesto que la función F sirve para hallar el sustituto en p de cualquier capital con vencimiento en t, debe exigirse que sea continua tanto respecto a t como respecto a p.

1.4. Suma financiera de capitales

Los agentes decisores, además de comparar capitales, deben saber agruparlos, es decir, deben saber la forma de sustituir varios capitales por uno solo equivalente a todos ellos.

Definición 1.4 *Dados los capitales* $(C_1, t_1), (C_2, t_2), \ldots, (C_n, t_n)$ *y una ley financiera* $F(t; p)$*, el capital* $(S; \tau)$ *es su* ***suma financiera*** *cuando se verifica que:*

$$S = C'_1 + C'_2 + \ldots + C'_n$$

siendo C'_i *la cuantía en* τ *equivalente al sumando* (C_i, t_i)*:*

$$(C_i, t_i) \sim (C'_i, \tau), \ i = 1, 2, \ldots, n.$$

Consideremos dos capitales sumandos (C_1, t_1) y (C_2, t_2). Los capitales (C_1, t_1), (C'_1, τ) y (V_1, p) son equivalentes. Lo mismo ocurre con (C_2, t_2), (C'_2, τ) y (V_2, p). El capital (S, τ) es equivalente al (V, p), siendo $S = C'_1 + C'_2$ y $V = V_1 + V_2$.

El capital nulo $(0, t)$ es el elemento neutro de la suma, es decir:

$$(C_i, t_i) + (0, t_i) = (C_i, t_i),\ \forall (C_i, t_i) \in E$$

Los agentes decisores también han de proceder en ocasiones a descomponer un capital en varios capitales cuya suma sea equivalente al capital inicial.

A través de la operación suma podemos ampliar las relaciones de equivalencia y preferencia financiera a conjuntos de capitales. Así diremos que un conjunto de capitales financieros es preferible o indiferente a otro, en base a una determinada ley financiera, siempre que lo sean sus respectivos capitales suma.

HOJA DE EJERCICIOS TEMA 1

1. Dada la función $F(t;p) = A + B(p-t)$, donde A, B, p y t son parámetros positivos, determinar qué valores deben tomar A y B para que pueda utilizarse como sistema financiero unitario.

2. Cierta persona puede optar por invertir unas cantidades esperando obtener en el mercado, en términos medios, un rendimiento lineal del 5 % anual hasta la fecha de disponibilidad del último capital. Las cuantías son 3.000 euros a un año y medio; 4.000 euros a 6 años o bien 10.000 euros a 22 años. Supuesto que su criterio de valoración es $L(t;p) = 1 + 0,05(p-t)$ con $p = 22$, determinar cuál es la mejor opción.

3. a) Dada la función $F(t;p) = e^{-ap(t-p)}$, donde a es un parámetro cualquiera y t y p son positivos, compruébese si cumple las propiedades necesarias para ser utilizada como sistema unitario de descuento.

   b) Según la ley resultante, tomando $a = 0,02$ y $p = 10$, determínense las cuantías de los capitales $(C_1, 13)$ y $(C_2, 18)$ equivalentes a (100.000, 15).

4. Obténganse las cuantías de los capitales equivalentes a 1.000 euros con vencimiento en 2005, cinco y diez años después de acuerdo con el sistema financiero de valoración $L(t;p) = 1 + 0,10(p-t)$:

   a) Tomando $p = 2015$

   b) Tomando $p = 2025$

5. Contéstese al apartado a) anterior de acuerdo con el sistema financiero de valoración $L_2(t;p) = (1 + 0,1)^{p-t}$.

6. a) Dados los capitales $(2C, 2005)$, $(C, 2007)$ y $(3C, 2010)$, determínese su suma financiera en el punto $\tau = 2009$, de acuerdo con la ley financiera $A(t;p) = 1 - 0,12(t-p)$ con $p = 2005$.

   b) Con los datos del apartado anterior, calcular la suma financiera en $\tau' = 2012$.

7. Sabiendo que el capital (500.000, τ) es suma financiera de los capitales (200.000, t_0 - 2), (100.000, t_0) y (150.000, t_0 + 3) según la ley $F(t;p) = (1 + 0,08)^{p-t}$, obténgase el valor del vencimiento τ.

8. Dados los conjuntos de capitales:

$$A = \{(C, t_0), (2C, t_0 + 2), (3C, t_0 + 4)\}\,; B = \{(2C, t_0 + 3), (5C, t_0 + 5)\}$$

   obténgase el valor del parámetro K de la ley $L(t;p) = 1 + K(p-t)$ con $p = t_0 + 5$ para que, de acuerdo con ella, ambos conjuntos sean equivalentes.

Capítulo 2

Magnitudes financieras

2.1. Introducción

Al analizar los fenómenos financieros aparecen diversas magnitudes que pueden clasificarse en fundamentales y derivadas. La cuantía y el vencimiento, componentes del capital financiero, son las **magnitudes primarias y fundamentales**. Las magnitudes que vayan apareciendo como resultado de operaciones realizadas con las fundamentales se denominan **magnitudes derivadas**, y sus unidades de medida vienen en función de aquellas. Las más importantes se estudian a lo largo de este tema.

Las magnitudes derivadas se obtienen de la ley financiera. Empezaremos por definir las más usadas partiendo del conocimiento de la ley financiera y después operaremos a la inversa, es decir, conocidas algunas magnitudes veremos la forma de obtener la ley.

La notación empleada para representar las magnitudes derivadas es distinta según utilicemos leyes de capitalización o de descuento. Desarrollaremos el estudio de las magnitudes en capitalización e indicaremos la notación utilizada en descuento, puesto que el desarrollo es totalmente paralelo al de capitalización.

2.2. Factor financiero

Como se ha indicado en el tema anterior, la ley financiera sirve para obtener el equivalente en p de cualquier capital (C, t). Para obtener el equivalente en cualquier otro momento distinto de p se utiliza el **factor financiero**.

El factor financiero va asociado a un intervalo temporal (t_1, t_2) en el que se aplica y es el número por el que hay que multiplicar la cuantía que vence en un extremo del intervalo para obtener la cuantía equivalente en el otro extremo.

Dada una ley de capitalización $L(t; p)$, dos capitales (C_1, t_1) y (C_2, t_2) son equivalentes si se verifica que tienen el mismo sustituto en p, tal y como vimos en el tema anterior:

$$C_1 \cdot L(t_1; p) = C_2 \cdot L(t_2; p) = V$$

donde $t_1 < t_2 < p$. Al despejar C_2 se obtiene:

$$C_2 = C_1 \cdot \frac{L(t_1;p)}{L(t_2;p)}$$

Se denomina **factor de capitalización**, y se denota $u(t_1, t_2; p)$, al cociente:

$$u(t_1, t_2; p) = \frac{L(t_1;p)}{L(t_2;p)} = \frac{C_2}{C_1} > 1$$

y es el número por el que hay que multiplicar a la cuantía que vence en t_1 para obtener la cuantía que vence en t_2:

$$C_2 = C_1 \cdot u(t_1, t_2; p).$$

También puede presentarse el caso en que es conocida la cuantía en el extremo superior C_2 y es preciso obtener la cuantía equivalente en t_1. Se denomina **factor de contracapitalización o capitalización anticipada**, y se denota por $u^*(t_1, t_2; p)$, al inverso del factor de capitalización:

$$u^*(t_1, t_2; p) = \frac{1}{u(t_1, t_2; p)} = \frac{L(t_2;p)}{L(t_1;p)} = \frac{C_1}{C_2} < 1$$

y es el número por el que hay que multiplicar a la cuantía que vence en t_2 para obtener la cuantía que vence en t_1:

$$C_1 = C_2 \cdot u^*(t_1, t_2; p).$$

Los factores tienen las siguientes características:

- Son magnitudes adimensionales o de dimensión cero respecto a C y t, es decir, no varían al cambiar las unidades de medida de la cuantía o del vencimiento.
- Los factores dependen, en general, de la situación de p.
- El factor es un cociente que mide la relación de intercambio entre dos capitales equivalentes en base a una determinada ley financiera.
- Cumplen la propiedad multiplicativa en intervalos de tiempo consecutivos. Si $t_1 < t_2 < t_3$, se verifica que:

$$u(t_1, t_2; p) \cdot u(t_2, t_3; p) = u(t_1, t_3; p)$$

En el caso de utilizar una ley financiera de descuento $A(t;p)$, el factor de descuento se denota por $v(t_1, t_2; p)$ y el factor de contradescuento por $v^*(t_1, t_2; p)$.

2.3. Rédito. Intereses y descuento

El **rédito** es el complemento a la unidad, en valor absoluto, del correspondiente factor.

De acuerdo con la definición, el **rédito de capitalización** se obtiene:

$$i(t_1, t_2; p) = u(t_1, t_2; p) - 1 = \frac{L(t_1; p)}{L(t_2; p)} - 1 = \frac{L(t_1; p) - L(t_2; p)}{L(t_2; p)} = \frac{C_2 - C_1}{C_1}$$

De la misma manera, el **rédito de contracapitalización** se obtiene:

$$i^*(t_1, t_2; p) = 1 - u^*(t_1, t_2; p) = 1 - \frac{L(t_2; p)}{L(t_1; p)} = \frac{L(t_1; p) - L(t_2; p)}{L(t_1; p)} = \frac{C_2 - C_1}{C_2}$$

El rédito de capitalización puede interpretarse como el incremento promedio de cuantía de dos capitales equivalentes, por unidad de capital disponible en el extremo inferior del intervalo. De forma análoga, el rédito de contracapitalización puede interpretarse como la disminución que experimenta el capital unitario en el intervalo (t_1, t_2) por unidad de capital situada en t_2.

El **rédito acumulado** mide el incremento por unidad al pasar de t_1 a t_2, pero referido a p. Se denota con la letra griega ξ (xi):

$$\xi(t_1, t_2; p) = L(t_1; p) - L(t_2; p)$$

Los réditos son magnitudes adimensionales, siendo habitual expresarlas en tanto por uno o en tanto por ciento.

El **interés ordinario**, o pospagable, mide el incremento que experimenta la cuantía de un capital C disponible en t_1 al diferir su disponibilidad hasta t_2, con $t_1 < t_2$. Se representa por I y su cuantía se obtiene:

$$I = C \cdot i(t_1, t_2; p)$$

La suma $C + I$ se denomina **montante**, y es la suma del capital C y los intereses I en t_2.

El **interés anticipado**, o prepagable, mide la disminución que experimenta la cuantía de un capital C disponible en t_2 al anticipar su disponibilidad a t_1, con $t_1 < t_2$. Se representa por I^* y su cuantía se obtiene:

$$I^* = C \cdot i^*(t_1, t_2; p)$$

Si la ley financiera es de descuento, denotaremos por $d(t_1, t_2; p)$ al rédito de descuento y por $d^*(t_1, t_2; p)$ al rédito de contradescuento. El rédito acumulado se representa con la letra griega η (eta), esto es, $\eta(t_1, t_2)$. Y el descuento ordinario y descuento diferido lo denotaremos por D y D^*, respectivamente. A la cantidad $C - D$ se le denomina valor descontado.

2.4. Tanto ordinario e instantáneo

El **tanto** ordinario es el resultado de dividir el rédito entre la amplitud del intervalo.

El **tanto de capitalización** se denota con la letra griega ρ (ro) y se obtiene de la siguiente manera:

$$\rho(t_1, t_2; p) = \frac{i(t_1, t_2; p)}{t_2 - t_1} = \frac{L(t_1; p) - L(t_2; p)}{(t_2 - t_1) \cdot L(t_2; p)}$$

Su significado financiero es el de incremento de cuantía generado en el intervalo (t_1, t_2) por unidad de capital disponible en t_1 y promedio por unidad de tiempo.

El **tanto de contracapitalización** se obtiene de la siguiente manera:

$$\rho^*(t_1, t_2; p) = \frac{i^*(t_1, t_2; p)}{t_2 - t_1} = \frac{L(t_1; p) - L(t_2; p)}{(t_2 - t_1) \cdot L(t_1; p)}$$

Y se interpreta como la disminución de la unidad de capital al adelantar su disponibilidad de t_2 a t_1, promedio por unidad de tiempo.

El **tanto acumulado** es el rédito acumulado dividido entre la amplitud del intervalo. Se denota con la letra griega μ (mu):

$$\mu(t_1, t_2; p) = \frac{\xi(t_1, t_2; p)}{t_2 - t_1} = \frac{L(t_1; p) - L(t_2; p)}{t_2 - t_1}$$

Y se interpreta como el valor medio o proporcional por unidad de tiempo del correspondiente rédito acumulado.

Las magnitudes tanto tienen dimensión -1 respecto a la magnitud fundamental vencimiento, por tanto para trabajar con los tantos es necesario conocer además de su valor numérico la unidad de tiempo a la que está referido, ya que su valor cambia al modificar la unidad de medida de tiempo.

Si la ley financiera es de descuento, el tanto de descuento se denota con la letra griega δ (delta), y se expresa $\delta(t_1, t_2; p)$, y el tanto de contradescuento por $\delta^*(t_1, t_2; p)$. El tanto acumulado se representa con la letra griega ν (nu), es decir, $\nu(t_1, t_2; p)$.

2.4.1. Tanto instantáneo

Las magnitudes derivadas que se han estudiado hasta ahora (factor, rédito y tanto) están definidas para intervalos finitos de tiempo. Cuando la amplitud del intervalo tiende a cero ($t_2 - t_1 \to 0$), el factor tiende a 1 y el rédito tiende a cero, por lo que no sirven para estudiar las variaciones de las leyes financieras en intervalos infinitesimales.

El **tanto instantáneo** es el límite del tanto cuando la amplitud del intervalo tiende a cero, y mide la variación experimentada por unidad de cuantía en cada instante de tiempo. De acuerdo con esta definición, para un intervalo $(t, t+h)$ en el que $h \to 0$, el **tanto instantáneo de capitalización** es:

$$\rho(t; p) = \lim_{h \to 0} \rho(t, t+h; p) = \lim_{h \to 0} \frac{L(t; p) - L(t+h; p)}{h \cdot L(t+h; p)}$$

Si la ley financiera es derivable (como suele ocurrir en la práctica), el tanto instantáneo se expresa:

$$\rho(t;p) = -\frac{\partial L(t;p)}{\partial t} \cdot \frac{1}{L(t;p)} = -\frac{\partial \ln L(t;p)}{\partial t}$$

donde ln significa logaritmo neperiano.

Análogamente, se define el **tanto instantáneo acumulado**:

$$\mu(t;p) = \lim_{h\to 0} \mu(t,t+h;p) = \lim_{h\to 0} \frac{L(t;p) - L(t+h;p)}{h} = -\frac{\partial L(t;p)}{\partial t} = \rho(t;p) \cdot L(t;p)$$

Cuando se conoce la función del tanto instantáneo, se puede obtener la correspondiente ley financiera así como el factor asociado a cualquier intervalo temporal. Si la función $\rho(t;p)$ es integrable, obtenemos la ley financiera de capitalización integrando entre t y p:

$$\int_t^p \rho(x;p)dx = -\int_t^p \frac{\partial \ln L(x;p)}{\partial x} dx = -[\ln L(x;p)]_t^p =$$

$$= -\ln L(p;p) + \ln L(t;p) = \ln L(t;p)$$

donde $L(p;p) = 1$ y $\ln 1 = 0$. Aplicando la definición de logaritmo, se tiene:

$$L(t;p) = e^{\int_t^p \rho(x;p)dx}$$

Al integrar entre t_1 y t_2, resulta:

$$\int_{t_1}^{t_2} \rho(x;p)dx = -\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial \ln L(x;p)}{\partial x} dx = -[\ln L(x;p)]_{t_1}^{t_2} =$$

$$= -\ln L(t_2;p) + \ln L(t_1;p) = \ln \frac{L(t_1;p)}{L(t_2;p)} = \ln u(t_1,t_2;p)$$

Despejando u se tiene:

$$u(t_1,t_2;p) = e^{\int_{t_1}^{t_2} \rho(x;p)dx}$$

También se puede obtener la expresión de la ley financiera a partir del tanto instantáneo acumulado:

$$\int_t^p \mu(x;p)dx = -\int_t^p \frac{\partial L(x;p)}{\partial x} dx = -[L(x;p)]_t^p = -1 + L(t;p)$$

Si despejamos $L(t;p)$:

$$L(t;p) = 1 + \int_t^p \mu(x;p)dx$$

Razonando de forma análoga a como se ha efectuado en capitalización, se tiene el **tanto instantáneo de descuento**:

$$\delta(t;p) = -\frac{\partial A(t;p)}{\partial t} \cdot \frac{1}{A(t;p)} = -\frac{\partial \ln A(t;p)}{\partial t}$$

Y el **tanto instantáneo acumulado** en descuento:

$$\nu(t;p) = -\frac{\partial A(t;p)}{\partial t}$$

Supuesto que $\delta(t;p)$ y $\nu(t;p)$ son integrables, se tiene:

$$A(t;p) = e^{-\int_p^t \delta(x;p)dx}$$

$$v(t_1, t_2; p) = e^{-\int_{t_1}^{t_2} \delta(x;p)dx}$$

$$A(t;p) = 1 - \int_p^t \nu(x;p)dx$$

HOJA DE EJERCICIOS TEMA 2

1. Sabiendo que los capitales (1.000, 0) y (1.250, 3) son financieramente equivalentes de acuerdo con la ley de capitalización $L(t;p) = (1+i)^{p-t}$, calcúlese:

   a) El valor del parámetro i.

   b) Factor, rédito y tanto de capitalización de la anterior ley, correspondientes al intervalo $[0,3]$.

   c) Tanto instantáneo y tanto instantáneo acumulado en $t = 3$, si $p = 5$.

2. Supuestos conocidos los réditos anuales de capitalización:

$$\begin{array}{lll} i_1 = 0,13 & \text{para los años} & 1,2,3 \\ i_2 = 0,12 & \text{para los años} & 4,5 \\ i_3 = 0,10 & \text{para los años} & 6,7 \end{array}$$

   obténgase la suma financiera en 7 de los capitales (1.000, 1), (1.500,3) y (2.000,5).

3. Sea el sistema financiero de descuento $A(t;p) = 1 - 0,05(t-p)$. Calcúlense las magnitudes derivadas correspondientes al intervalo $(5,7)$ con una ley en $p = 1$.

4. ¿Cuál sería el valor del parámetro K en la ley $L(t;p) = (1+K)^{(p-t)^2}$ con $p = t_0 + 5$ para que sobre el capital (1.000, t_0) se obtengan unos intereses de 300 euros en $t_0 + 3$?

5. Sabiendo que el tanto instantáneo acumulado de una ley financiera de capitalización es: $\mu(t;p) = 0,02t$. Determínese:

   a) La expresión analítica del sistema al que pertenece.

   b) Los intereses vencidos y acumulado producidos por un capital de cuantía 1.000 euros en el intervalo $(2,5)$ utilizando dos leyes del sistema:

      - Con $p_1 = 6$
      - Con $p_2 = 8$

6. Se descuenta en un banco con fecha $31-10-04$ una letra de 100.000 euros con vencimiento $31-10-06$ de acuerdo con la ley $A(t;p) = 1 - 0,10(t-p)$ con $p = 31-10-01$.

   a) Determínese el descuento ordinario practicado y la cuantía o efectivo que abonará el banco.

   b) Determínense, asimismo, los descuentos pospagable y acumulado y las relaciones que guardan con el anterior.

Capítulo 3

Modelos clásicos de valoración financiera

3.1. Leyes financieras generales

Se ha definido un sistema financiero como la expresión matemática que recoge el criterio de proyección de un capital financiero en cualquier punto de referencia. No obstante son cuatro los más utilizados en la práctica, los llamados sistemas clásicos de valoración: capitalización simple, capitalización compuesta, descuento simple comercial y descuento compuesto. Estos sistemas cumplen una serie de propiedades que permiten agruparlos en determinados tipos que vamos a ver a continuación.

3.1.1. Leyes estacionarias

Estas leyes cumplen la propiedad de que no varían ante cualquier desplazamiento que se produzca en la variable tiempo, lo cual se expresa, para una ley de capitalización, así:

$$L(t;p) = L(t+h;p+h),\ \forall h \in \mathbb{R}$$

es decir, estas leyes no tienen en cuenta la época del tiempo en la que se está operando, sino sólo cuenta el tiempo interno que hay entre t y p.

Algunas propiedades de estas leyes son:

- La función $L(t;p)$ puede escribirse en función de la variable $z = p - t$, denominada *tiempo interno*.

- La condición necesaria y suficiente para que una ley financiera sea estacionaria es:

$$\frac{\partial L(t;p)}{\partial t} + \frac{\partial L(t;p)}{\partial p} = 0$$

- El tanto instantáneo en una ley estacionaria se puede expresar en función de $z = p - t$.
- Todas las leyes financieras que se utilizan en la práctica son estacionarias.

Todo lo escrito para capitalización es de aplicación al descuento.

3.1.2. Leyes sumativas

Una ley $L(t;p)$ es sumativa si, para dos intervalos consecutivos cualesquiera (t,s) y (s,p) con $t < s < p$, verifica que los intereses de t a s con punto de valoración en s más los intereses de s a p con punto de valoración en p, son iguales a los intereses del intervalo total (t,p) con punto de valoración en p. Es decir:

$$I(t,s;s) + I(s,p;p) = I(t,p;p)$$

Por tanto, en estas leyes los intereses correspondientes a intervalos parciales no se acumulan al principal para introducir nuevos intereses.

Recordando que $I(t,s;s) = C \cdot i(t,s;s) = C \cdot [L(t;s) - 1]$, podemos escribir la expresión anterior de la forma:

$$C \cdot [L(t;s) - 1] + C \cdot [L(s;p) - 1] = C \cdot [L(t;p) - 1]$$

o simplificando:

$$L(t;s) + L(s;p) - 1 = L(t;p)$$

Algunas propiedades de estas leyes son:

- Las leyes sumativas, en general, tienen la forma:

  $$L(t;p) = 1 + \phi(p) - \phi(t)$$

  que es una función de variables separadas con la misma forma ϕ. La función ϕ ha de ser creciente para que $L(t;p) > 1$.

- La condición necesaria y suficiente para que una ley financiera sea sumativa es que el tanto instantáneo acumulado no dependa del punto p de valoración.

  $$\mu(t,p) = -\frac{\partial L(t;p)}{\partial t} = \phi'(t)$$

Todo lo escrito para capitalización es de aplicación al descuento.

3.1.3. Leyes multiplicativas

Una ley financiera es multiplicativa cuando se verifica que:

$$L(t;s)\cdot L(s;p)=L(t;p)$$

siendo $t<s<p$.

Algunas propiedades de estas leyes son:

- Las leyes multiplicativas tienen la forma:

$$L(t;p)=e^{\phi(p)-\phi(t)}$$

  es decir, una función exponencial de variables separadas en el exponente.

- La condición necesaria y suficiente para que una ley sea multiplicativa es que el tanto instantáneo no dependa de p.

$$\rho(t;p)=-\frac{\partial \ln L(t;p)}{\partial t}=\phi'(t)$$

- Una ley financiera no puede ser a la vez sumativa y multiplicativa.

- La equivalencia de capitales es independiente del punto p de aplicación.

$$u(t_1,t_2)=\frac{L(t_1;p)}{L(t_2;p)}=\frac{e^{\phi(p)-\phi(t_1)}}{e^{\phi(p)-\phi(t_2)}}=e^{\phi(t_2)-\phi(t_1)}$$

Todo lo escrito para capitalización es de aplicación al descuento.

3.1.4. Leyes unificables

Una ley de capitalización $L(t;p)$ es unificable cuando para cualesquiera capitales sumandos:

$$(C_1,t_1),(C_2,t_2),\ldots,(C_n,t_n)$$

es posible encontrar al menos un capital suma financiera (C,τ) con independencia del punto p elegido. Debe verificarse, por tanto:

$$\sum_{s=1}^{n} C_s\cdot f(t_s;\tau)=C\ ,\ \forall p$$

siendo $f(t_s;\tau)$ el factor financiero y $C_s\cdot f(t_s;\tau)$ la cuantía equivalente en τ a la C_s en t_s. El capital (C,τ) recibe el nombre de *capital unificado* y τ el de *vencimiento común*.

Algunas propiedades de estas leyes son:

- Las leyes unificables tienen la forma:

$$L(t;p) = 1 + \alpha(p) \cdot [\beta(t) - \beta(p)]$$

  donde, si $\alpha(p) > 0$ la función β ha de ser decreciente, y si $\alpha(p) < 0$ la función β ha de ser creciente.

- La condición necesaria y suficiente para que una ley sea unificable es que el determinante wronskiano sea idénticamente nulo:

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial L(t;p)}{\partial t} & \dfrac{\partial^2 L(t;p)}{\partial t^2} \\ \dfrac{\partial^2 L(t;p)}{\partial t \partial p} & \dfrac{\partial^3 L(t;p)}{\partial t^2 \partial p} \end{vmatrix} = 0$$

- Las leyes multiplicativas son unificables con infinitas soluciones para el capital unificado.

- Las leyes sumativas son unificables con una sola solución de capital unificado, que recibe el nombre de solución media, siendo la cuantía $C = C_1 + C_2 + \ldots + C_n$ y τ el vencimiento medio ponderado.

Todo lo escrito para capitalización es de aplicación al descuento.

3.2. Producto financiero de leyes

Se pueden obtener nuevas leyes financieras como consecuencia de la aplicación sucesiva de otras leyes ya conocidas. El caso más elemental de estos procesos es el producto financiero.

Dadas las leyes de capitalización $L_1(t;p_1)$ y $L_2(t;p_2)$ con puntos de aplicación en p_1 y p_2 respectivamente, siendo $p_1 < p_2$, se denomina producto financiero a la aplicación sucesiva de ambas leyes, lo cual da lugar a la aparición de una nueva ley $L(t;p)$ definida por:

$$L(t;p) = \begin{cases} L_1(t;p_1) \cdot L_2(p_1;p_2) & \text{si} \quad t < p_1 \\ L_2(t;p_2) & \text{si} \quad p_1 < t < p_2 \end{cases}$$

El denominado *convenio lineal*, cuando se aplican sucesivamente la capitalización compuesta y la capitalización simple, es un ejemplo de producto financiero.

3.3. Capitalización simple

Esta ley se caracteriza por ser a la vez sumativa y estacionaria. Su expresión general es:

$$L(t;p) = 1 + i \cdot (p - t) \text{ con } i > 0 \text{ y } t < p$$

Esta expresión puede anotarse en forma estacionaria así:

$$L(z) = 1 + i \cdot z \text{ con } z = p - t$$

La capitalización simple se utiliza fundamentalmente en operaciones a corto plazo y también se la conoce como **interés simple**.

3.3.1. Magnitudes derivadas

Las principales magnitudes derivadas de esta ley son:

- Factor de capitalización: $u(t_1; t_2) = \dfrac{1 + i \cdot (p - t_1)}{1 + i \cdot (p - t_2)}$
- Rédito: $i(t_1; t_2) = u(t_1; t_2) - 1 = \dfrac{i \cdot (t_2 - t_1)}{1 + i \cdot (p - t_2)}$
- Tanto: $\rho(t_1; t_2) = \dfrac{i(t_1; t_2)}{t_2 - t_1} = \dfrac{i}{1 + i \cdot (p - t_2)}$
- Tanto instantáneo: $\rho(t) = \dfrac{i}{1 + i \cdot (p - t)}$

Las magnitudes derivadas acumuladas de esta ley son:

- Rédito acumulado: $\xi(t_1; t_2) = [1 + i \cdot (p - t_1)] - [1 + i \cdot (p - t_2)] = i \cdot (t_2 - t_1)$
- Tanto acumulado: $\mu(t_1; t_2) = i$
- Tanto instantáneo acumulado: $\mu(t) = i$

Como se puede observar, en capitalización simple, las magnitudes derivadas acumuladas no dependen de p.

3.3.2. Tantos equivalentes

La unidad de medida que se utiliza con carácter general es el año. Sin embargo, la capitalización simple se aplica en operaciones a corto plazo, por lo que pueden utilizarse otras unidades de medida del tiempo como por ejemplo el trimestre, el mes, etc. Si en la ley financiera se multiplica por m a t y p, se ha de verificar que:

$$L(t; p) = L(t \cdot m; p \cdot m)$$

siendo:

$$L(t; p) = 1 + i \cdot (p - t)$$
$$L(t \cdot m; p \cdot m) = 1 + i_m \cdot (p \cdot m - t \cdot m) = 1 + i_m \cdot m \cdot (p - t)$$

por lo que, al igualar los segundos miembros, resulta:

$$i = i_m \cdot m \Longrightarrow i_m = \frac{i}{m}$$

Al multiplicar la medida del tiempo por m, el parámetro i queda dividido por m. Observe que al multiplicar por m se pasa a una unidad de medida del tiempo $1/m$ de año. Los valores de m más usuales son $m = 2, 3, 4, 6$ y 12 que corresponden a periodos semestrales, cuatrimestrales, trimestrales, bimestrales y mensuales respectivamente.

3.3.3. Intereses y montante

Tal y como se definió anteriormente, los intereses son capitales cuyas cuantías se obtienen multiplicando C por el rédito correspondiente. Así, el interés ordinario es:

$$I = C \cdot i(t_1, t_2) = \frac{C \cdot i \cdot (t_2 - t_1)}{1 + i \cdot (p - t_2)}$$

En la mayoría de las operaciones que se realizan en la práctica, los intereses se calculan para intervalos cuyo extremo superior coincide con p ($t_2 = p$). En estos casos coinciden el interés ordinario y el interés acumulado. Los intereses para un intervalo $(t; p)$ son:

$$I = C \cdot i \cdot (p - t) = C \cdot i \cdot z \text{ con } z = p - t$$

En esta expresión, i se mide en tanto por uno anual y z en años. Dado que esta ley se utiliza en operaciones a corto plazo, z se suele expresar como fracción de año. Las formas más utilizadas son:

$$z = \frac{k}{12} \qquad z = \frac{n}{360} \qquad z = \frac{n}{365}$$

donde k es el número de meses y n el número de días. Es bantante frecuente utilizar el año comercial de 360 días, en vez del año civil de 365 días. Los intereses se expresarán:

$$I = \frac{C \cdot i \cdot k}{12} \qquad I_{co} = \frac{C \cdot i \cdot n}{360} \qquad I_{ci} = \frac{C \cdot i \cdot n}{365}$$

El montante es la suma del capital inicial y los intereses:

$$M = C + I$$

También se puede obtener a partir del capital inicial (C, t) calculando su equivalente en p:

$$M = C \cdot [1 + i \cdot (p - t)] = C \cdot (1 + i \cdot z) = C + C \cdot i \cdot z$$

3.4. Capitalización compuesta

La capitalización compuesta es una ley multiplicativa y estacionaria por lo que goza de las propiedades inherentes a estas leyes. Su expresión general es:

$$L(t;p) = e^{k\cdot(p-t)} = (1+i)^{p-t} \text{ con } i > 0, k > 0, t < p$$

siendo $e^k = 1 + i$, por tanto $k = \ln(1+i)$.

Esta ley puede anotarse en forma estacionaria:

$$L(z) = e^{k\cdot z} = (1+i)^z \text{ con } z = p - t$$

La capitalización compuesta se utiliza en operaciones a largo plazo y también se conoce con la denominación de **interés compuesto**.

3.4.1. Magnitudes derivadas

Las principales magnitudes derivadas de esta ley son:

- Factor de capitalización: $u(t_1;t_2) = \dfrac{(1+i)^{p-t_1}}{(1+i)^{p-t_2}} = (1+i)^{t_2-t_1}$
- Rédito: $i(t_1;t_2) = (1+i)^{t_2-t_1} - 1$
- Tanto: $\rho(t_1;t_2) = \dfrac{(1+i)^{t_2-t_1} - 1}{t_2 - t_1}$
- Tanto instantáneo: $\rho(t) = -\dfrac{\partial \ln L(t;p)}{\partial t} = k = \ln(1+i) = \rho$

Las magnitudes derivadas acumuladas en capitalización compuesta dependen de p y no se utilizan en la práctica.

3.4.2. Tantos equivalentes

Dos réditos, o tantos, son equivalentes cuando aplicados a un mismo intervalo temporal proporcionan idéntico resultado.

Sea i_k el rédito asociado a periodos de amplitud $1/k$ de año o, lo que es lo mismo, que el año contiene k periodos de esta amplitud, e i_m un rédito asociado a periodos de amplitud $1/m$ de año, es decir, que el año contiene m periodos de esta amplitud. Dichos réditos son equivalentes cuando se verifica que:

$$(1+i_k)^k = (1+i_m)^m$$

Cuando uno de los periodos es el año ($k = 1$), el tanto $i_1 = i$ recibe la denominación de **tanto efectivo anual**, y se tiene:

$$1 + i = (1 + i_m)^m$$

Dado que i_m se aplica a periodos de amplitud $1/m$ de año y que la unidad de medida del tiempo es el año, su proyección aritmética anual se denomina **tanto nominal** de frecuencia m.

El tanto efectivo anual se anota con i, sin subíndices, y el tanto nominal de frecuencia m se anota con j_m. Este último se obtiene:

$$j_m = m \cdot i_m \Longrightarrow i_m = \frac{j_m}{m}$$

La ecuación general que relaciona el tanto efectivo, el tanto nominal y el rédito equivalente es:

$$(1 + i) = \left(1 + \frac{j_m}{m}\right)^m = (1 + i_m)^m$$

3.4.3. Intereses y montante

Dado un capital $(C; t)$ su equivalente en p tiene una cuantía:

$$M = C \cdot (1 + i)^{p-t} = C \cdot (1 + i)^z$$

la cuantía M es el montante, y los intereses en p son de cuantía I:

$$I = M - C = C \cdot [(1 + i)^z - 1]$$

3.5. Descuento comercial

Esta ley de descuento es a la vez sumativa y estacionaria, por lo que disfruta de las propiedades de estas leyes. Su expresión general es:

$$A(t; p) = 1 - d \cdot (t - p) \text{ con } d > 0 \text{ y } t > p$$

y también ha de verificarse que $A(t; p) > 0$ por lo que el campo de validez está limitado a:

$$1 - d \cdot (t - p) > 0 \Rightarrow 1 > d \cdot (t - p) \Rightarrow t - p < \frac{1}{d}$$

El descuento comercial se puede aplicar siempre que el intervalo temporal sea menor que $\frac{1}{d}$.

3.5.1. Magnitudes derivadas

Las principales magnitudes derivadas de esta ley son:

- Factor de descuento: $v(t_1, t_2) = \dfrac{1 - d \cdot (t_2 - p)}{1 - d \cdot (t_1 - p)}$
- Rédito: $d(t_1, t_2) = 1 - v(t_1, t_2) = \dfrac{d \cdot (t_2 - t_1)}{1 - d \cdot (t_1 - p)}$
- Tanto: $\delta(t_1, t_2) = \dfrac{d}{1 - d \cdot (t_1 - p)}$
- Tanto instantáneo: $\delta(t) = \dfrac{d}{1 - d \cdot (t - p)}$

Las magnitudes derivadas acumuladas de esta ley son:

- Rédito acumulado: $\eta(t_1, t_2) = [1 - d \cdot (t_1 - p)] - [1 - d \cdot (t_2 - p)] = d \cdot (t_2 - t_1)$
- Tanto acumulado: $\nu(t_1, t_2) = d$
- Tanto instantáneo acumulado: $\nu(t) = d$

En conclusión, las magnitudes derivadas acumuladas no dependen de p.

3.5.2. Tantos equivalentes

Razonando de forma análoga a como se hizo en capitalización simple, si d es el tanto para periodos anuales y d_m el rédito para periodos de amplitud $1/m$ resulta:

$$d = d_m \cdot m \Leftrightarrow d_m = \frac{d}{m}$$

3.5.3. Valor descontado y descuento

Dado un capital (C, t) su equivalente en p es:

$$V_0 = C \cdot [1 - d \cdot (t - p)] = C \cdot (1 - d \cdot z) = C - C \cdot d \cdot z$$

siendo V_0 el valor descontado. $C \cdot d \cdot z$ es la cuantía del descuento realizado por adelantar la disponibilidad del capital C desde t hasta p:

$$D = C \cdot d \cdot z$$

En esta expresión, d se mide en tanto por uno y z en años. Al utilizarse esta ley en operaciones a corto plazo, z suele expresarse en forma de fracción. Los casos más frecuentes son:

$$z = \frac{k}{12} \qquad z = \frac{n}{360} \qquad z = \frac{n}{365}$$

siendo k el número de meses y n el número de días, utilizándose frecuentemente el año comercial de 360 días. La expresión del descuento es ahora:

$$D = \frac{C \cdot d \cdot k}{12} \qquad D_{co} = \frac{C \cdot d \cdot n}{360} \qquad C_{ci} = \frac{C \cdot d \cdot n}{365}$$

3.6. Descuento compuesto

Se denomina descuento compuesto a la ley financiera que es a la vez multiplicativa y estacionaria. Su expresión general es:

$$A(t;p) = e^{-k(t-p)} = (1-d)^{t-p} = (1+i)^{-(t-p)}$$

con $k > 0$ y $e^{-k} = 1 - d = (1+i)^{-1} = v$.

Esta ley se anota en forma estacionaria como:

$$A(z) = e^{-kz} = (1-d)^{z} = (1+i)^{-z}$$

con $z = t - p$.

3.6.1. Magnitudes derivadas

Las principales magnitudes derivadas de esta ley son:

- Factor de descuento: $v(t_1;t_2) = \dfrac{e^{-k(t_2-p)}}{e^{-k(t_1-p)}} = e^{-k(t_2-t_1)}$, que no depende de p.
- Rédito: $d(t_1;t_2) = 1 - e^{-k(t_2-t_1)}$
- Tanto: se obtiene dividiendo el rédito de descuento entre $t_2 - t_1$.
- Tanto instantáneo: $\delta(t) = -\dfrac{\partial \ln A(t;p)}{\partial t} = k$, que es constante.

Las magnitudes derivadas acumuladas dependen de p y no se utilizan en la práctica.

HOJA DE EJERCICIOS TEMA 3

1. Compruébese que el siguiente sistema financiero de capitalización es estacionario:

$$L(t;p) = \frac{1}{1-K(p-t)} \text{ con } K > 0$$

2. Sabiendo que el tanto instantáneo de un sistema financiero de capitalización estacionario es $\rho(z) = 0,10z$, obténgase el factor de capitalización asociado al intervalo $(t_1, t_2) = (2006, 2008)$ con $p = 2010$ y compruébese que su valor no se modifica si se efectúa un cambio en el origen de tiempos situándolo en t_1.

3. Compruébese si el sistema financiero de descuento:

$$A(t;p) = 1 - K(t^2 - p^2) \text{ con } t > p \text{ y } 0 < K < \frac{1}{t^2 - p^2}$$

cumple las propiedades de los sistemas sumativos.

4. a) Dado el sistema financiero de capitalización $L(t;p) = \frac{p^2+p}{t^2+t}$, estúdiese si es sumativo o multiplicativo

   b) De acuerdo con él, determínese cuál de los dos capitales:

$$(100{,}000, 2008); (110{,}000, 2020)$$

   resulta preferible financieramente.

5. Dado el tanto instantáneo $\rho(t;p) = \frac{a}{1+at}$ con $a > 0$:

   a) Obténgase la expresión de $L(t;p)$.

   b) Indique a qué tipo de sistema financiero pertenece.

6. Sabiendo que el tanto instantáneo acumulado de una ley de descuento es $\nu(t;p) = 0,09tp$, determínese:

   a) La expresión analítica de la ley.

   b) A qué tipo de sistema financiero pertenece.

7. Estúdiese si los siguientes sistemas financieros son unificables:

   a) $A(t;p) = 1 - k(t-p)^2$

   b) $L(t;p) = 1 + i(p-t)$

   c) $A(t;p) = 1 - d(t-p)$

8. Dos capitales de cuantía 10.000 euros son depositados en dos entidades financieras para recibir su equivalente dentro de cuatro años en base a las leyes financieras $L_1(z) = 1+iz$ y $L_2(z) = (1+i)^z$, respectivamente, siendo $i = 0,10$ y p situado al final de la operación.

   a) Calcúlese el montante obtenido en cada una de las entidades.

   b) Compare los sistemas utilizados.

9. Cierta persona realiza una imposición de 10.000 euros a plazo fijo de tres años en una entidad financiera que opera según el sistema $L(z) = 1+0,10z$ con punto de aplicación al final de cada operación. Transcurridos los tres años retira los intereses y repite la operación por igual periodo de tiempo y en las mismas condiciones. Determínese:

   a) La cuantía total de los intereses obtenidos en el conjunto de las dos operaciones y la cuantía de los intereses obtenidos en el caso de realizar la imposición a seis años de acuerdo con el mismo sistema de valoración.

   b) Lo mismo que en apartado anterior pero en el supuesto de que la entidad financiera operase de acuerdo con el sistema $L(z) = (1+0,10)^z$.

10. Basándose en el sistema de capitalización compuesta $L(t;p) = (1+i)^{p-t}$ con $i = 0,10$ cuando t y p están expresados en años, determínense los valores del rédito y del tanto de capitalización correspondientes a periodos de amplitud:

   a) Trienal.

   b) Anual.

   c) Semestral.

   d) Bimestral.

   e) Mensual.

   f) Semanal.

   g) Diaria.

   h) Infinitesimal.

11. A un inversor se le ofrecen dos clases de títulos para invertir:

   a) Obligaciones que generan intereses semestrales a rédito $i_1^{(2)} = 3\,\%$.

   b) Obligaciones que generan intereses trimestrales a rédito $i_2^{(4)} = 1,5\,\%$.

   ¿Cuál de ellos le proporcionará un tanto efectivo anual mayor? ¿Qué valor debería tomar $i_1^{(2)}$ para que la rentabilidad efectiva del caso a) coincida con la del caso b)?

12. Determínese la expresión de la cuantía equivalente en 2010 al capital (C,2004) si se valora en capitalización compuesta:

a) A rédito anual i_1.

b) A rédito trimestral $i_2^{(4)}$.

c) A tanto nominal semestral $j_{3(2)}$.

d) A tanto bienal $\rho_4(t, t+2) = K$.

13. A cierta persona que tiene derecho a percibir los siguientes capitales: 1.000 euros el 30 de octubre de 2005, 1.500 euros el 30 de abril de 2006 y 3.000 euros el 30 de abril de 2008, se le ofrece la posibilidad de sustituir éstos por un único capital de acuerdo con uno de los sistemas financieros siguientes:

$$L_1(z) = 1 + 0,08z$$

$$A_1(z) = 1 - 0,10z$$

$$L_2(z) = (1 + 0,08)^z$$

Se pide determinar la solución media de capital unificado que le resulta más favorable.

Capítulo 4

Valoración financiera de rentas

4.1. Concepto financiero de renta

El análisis de algunos fenómenos financieros requiere operar con conjuntos de capitales disponibles en tiempos distintos. Vamos a limitarnos a la valoración de estos conjuntos de capitales, esto es, a su tratamiento matemático, haciendo abstracción de consideraciones económicas como pueda ser la fuente generadora de renta (pagos de un préstamo, pensión por jubilación, etc.) o consideraciones de tipo jurídico respecto a la naturaleza de los capitales (rendimientos o pagos).

Definición 4.1 *Se entiende por* ***renta*** *un conjunto de capitales financieros asociados biunívocamente a una sucesión de intervalos de tiempo consecutivos.*

Para definir la renta tenemos que especificar la cuantía y vencimiento de cada uno de los capitales, así como el intervalo de tiempo a que van referidos. A cada capital le corresponde un sólo intervalo y viceversa. Los intervalos de tiempo son llamados **periodos de maduración**, ya que es el tiempo que tiene que transcurrir para que se genere cada capital llamado término de la renta. Al extremo inferior del primer periodo t_0 se le llama **origen** de la renta, el extremo superior del último periodo t_n es el **final** de la renta, siendo la diferencia $t_n - t_0$ su **duración**.

La representación gráfica de una renta sobre un eje de tiempos se puede observar en la Figura 4.1.

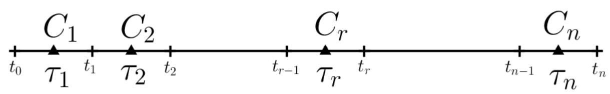

Figura 4.1: Representación gráfica de una renta.

4.2. Valor capital o financiero de una renta

Definición 4.2 *Dada una renta y fijado un criterio de valoración mediante una ley financiera cualquiera $F(t;p)$, se denomina* ***valor capital o valor financiero*** *de una renta en un momento α al capital cuya cuantía es la suma financiera de los términos de la renta en α:*

$$V_\alpha = \sum_{r=1}^{n} C_r \cdot f(\tau_r, \alpha; p) = \sum_{r=1}^{n} C_r \cdot \frac{F(\tau_r;p)}{F(\alpha;p)}$$

siendo $f(\tau_r, \alpha; p)$ el factor financiero para desplazar el término que vence en τ_r hasta α.

Los valores financieros de una renta en dos puntos cualesquiera son siempre capitales equivalentes, de forma que conocido el valor en un punto α, puede calcularse en cualquier otro α' multiplicando por el correspondiente factor.

Si el valor financiero se calcula en el origen de la renta, se llama valor inicial o **valor actual**:

$$V_{t_0} = \sum_{r=1}^{n} C_r \cdot \frac{F(\tau_r;p)}{F(t_0;p)}$$

siendo V_{t_n} el **valor final** de la misma:

$$V_{t_n} = \sum_{r=1}^{n} C_r \cdot \frac{F(\tau_r;p)}{F(t_n;p)}$$

y ambos son financieramente equivalentes:

$$V_{t_n} = V_{t_0} \cdot \frac{F(t_0;p)}{F(t_n;p)}$$

El valor financiero es independiente de los periodos de maduración, depende sólo de las cuantías y vencimientos de los capitales, por ello vamos a considerar que los vencimientos están situados al principio o al final de cada periodo. Si los vencimientos de los capitales están al final de cada periodo $\tau_r = t_r$ la renta se denomina **pospagable**. Se dirá **prepagable** cuando los vencimientos coincidan con el principio del periodo correspondiente $\tau_r = t_{r-1}$.

Si el punto p de aplicación de la ley es posterior a todos los vencimientos, o coincide con el último de ellos, la renta se valora en capitalización, y en caso contrario para la valoración se utilizarán leyes de descuento.

4.2.1. Casos particulares

Calculemos el valor actual de la renta pospagable recogida en el siguiente esquema de la Figura 4.2, con varios criterios de valoración:

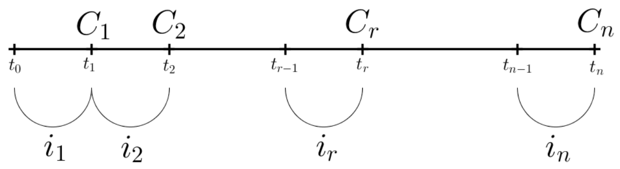

Figura 4.2: Representación gráfica de una renta pospagable.

a) Si se valora según la ley de capitalización compuesta $L(t;p) = (1+i)^{p-t}$ será:

$$V_{t_0} = \sum_{r=1}^{n} C_r u^*(t_0, t_r; p) = \sum_{r=1}^{n} C_r (1+i)^{-(t_r - t_0)}$$

b) Si se valora según la ley de descuento simple comercial $A(t;p) = 1 - d(t-p)$ con $p = t_0$:

$$V_{t_0} = \sum_{r=1}^{n} C_r v(t_0, t_r; p) = \sum_{r=1}^{n} C_r \frac{1 - d(t_r - p)}{1 - d(t_0 - p)} = \sum_{r=1}^{n} C_r [1 - d(t_r - t_0)]$$

c) Si en lugar de conocer la ley de valoración completa, se nos dan los réditos periodales, por ejemplo de capitalización i_h, dado que $i_h = i(t_{h-1}, t_h; p) = u(t_{h-1}, t_h; p) - 1$, si aplicamos la propiedad multiplicativa de los factores, resulta:

$$V_{t_0} = \sum_{r=1}^{n} C_r u^*(t_0, t_r; p) = \sum_{r=1}^{n} C_r \prod_{h=1}^{r} (1 + i_h)^{-1}$$

El valor final de la renta es:

$$V_{t_n} = \sum_{r=1}^{n} C_r u(t_r, t_n; p) = \sum_{r=1}^{n-1} C_r \prod_{h=r+1}^{n} (1 + i_h) + C_n$$

que también puede calcularse capitalizando el valor actual por toda la duración de la renta:

$$V_{t_n} = V_{t_0} u(t_0, t_n; p) = V_{t_0} \prod_{h=1}^{n} (1 + i_h)$$

Análogamente, en el caso de rentas prepagables, tenemos el esquema de la Figura 4.3.

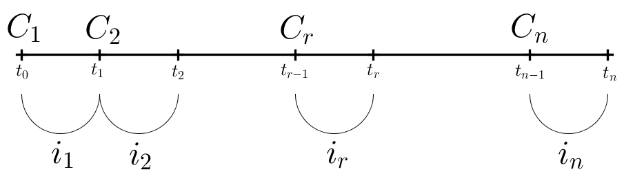

Figura 4.3: Representación gráfica de una renta prepagable.

Para indicar que se trata de una renta prepagable, ponemos dos puntos sobre el símbolo de valor financiero:

$$\ddot{V}_{t_0} = \sum_{r=1}^{n} C_r u^*(t_0, t_{r-1}; p) = C_1 + \sum_{r=2}^{n} C_r \prod_{h=1}^{r-1} (1 + i_h)^{-1}$$

$$\ddot{V}_{t_n} = \sum_{r=1}^{n} C_r u(t_{r-1}, t_n; p) = \sum_{r=1}^{n} C_r \prod_{h=r}^{n} (1 + i_h)$$

4.3. Clasificación de las rentas

Las rentas pueden clasificarse atendiendo a diversos aspectos que sirven para definirlas.

Atendiendo a la aleatoriedad

- Rentas ciertas, cuando son conocidos los términos de la renta y la duración.
- Rentas aleatorias, cuando no se conoce con certeza alguna de las componentes de la renta, aunque sí es conocida su distribución de probabilidad (por ejemplo, la pensión de un jubilado).

Atendiendo a la amplitud de los periodos de maduración

- Rentas discretas, cuando los periodos de maduración son finitos.
    - Rentas periódicas, cuando todos los periodos de maduración son de la misma amplitud.
    - Rentas no periódicas, cuando no se cumple lo anterior.
- Rentas continuas, cuando los periodos son infinitesimales, produciéndose un flujo continuo de capitales.

Atendiendo a las cuantías de los capitales

- Rentas constantes, cuando las cuantías son iguales. Cabe destacar las rentas unitarias, cuando $C = 1$, por ser muy útiles como punto de partida para valorar las rentas de cuantía constante.
- Rentas variables, cuando las cuantías son distintas.

Atendiendo a la duración

- Rentas temporales, cuando la duración es finita.
- Rentas perpetuas, cuando la duración es infinita (por ejemplo, la renta de la tierra).

Atendiendo al momento en que vencen los términos de la renta dentro de cada periodo de maduración

- Rentas prepagables, cuando vencen en el extremo inferior de cada periodo de maduración.

- Rentas pospagables, cuando vencen en el extremo superior del correspondiente periodo de maduración.

Atendiendo al momento de valoración

- Rentas inmediatas, cuando el momento α de valoración está situado dentro del intervalo de duración de la renta.

- Rentas diferidas, cuando el momento α es anterior al origen de la renta.

- Rentas anticipadas, cuando el momento α es posterior al final de la renta.

4.4. Propiedades de las rentas

Enunciamos a continuación dos propiedades que en realidad son dos posibles descomposiciones de las rentas, muy útiles desde el punto de vista práctico para calcular su valor financiero:

1. **Linealidad del valor financiero**: Si los términos de una renta pueden expresarse como combinación lineal de otros dados, su valor financiero en cualquier punto α es igual a la misma combinación lineal de los valores financieros de las rentas en que se ha descompuesto. Esta propiedad permite sustituir la renta por una combinación de otras más sencillas.

2. **Aditividad respecto al intervalo de definición**: Podemos descomponer el valor de la renta contenida en $[t_0, t_n]$ en suma de los valores financieros de las rentas contenidas en los intervalos disjuntos $[t_0, t_s]$ y $(t_s, t_n]$.

4.5. Rentas discretas valoradas con rédito periodal constante

En esta sección se estudian las rentas discretas comenzando por las de cuantía unitaria, con el fin de obtener fórmulas operativas que servirán también para la valoración de los restantes tipos de rentas.

Las expresiones que vamos a desarrollar son válidas siempre que sean constantes los réditos de valoración aplicables a cada uno de los periodos, aunque estos sean de distinta amplitud, aunque habitualmente trabajaremos con rentas discretas de periodo uniforme.

4.5.1. Renta unitaria, pospagable y temporal

En la Figura 4.4 se puede ver un esquema gráfico.

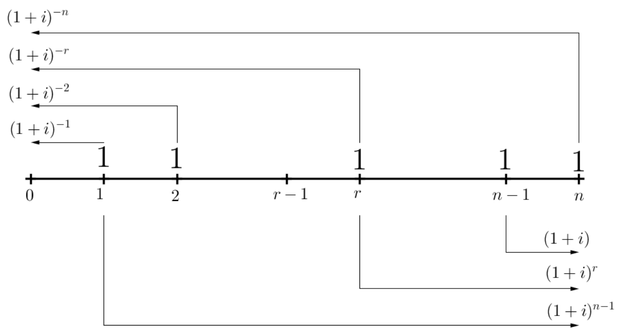

Figura 4.4: Renta unitaria, pospagable y temporal.

Los valores actual y final de esta renta se representan mediante los símbolos $a_{\overline{n}|i}$ y $s_{\overline{n}|i}$ que fueron adoptados internacionalmente en el Congreso de Actuarios celebrado en Londres en 1898.

Se llama valor actual de la renta a aquel capital que, en el origen, resulta equivalente financieramente a los términos de la misma. Su cuantía se calcula sumando financieramente en el origen todos los términos que componen la renta y para ello los trasladamos uno por uno hasta 0 con el correspondiente factor de contracapitalización. Se trata de una suma de términos de una progresión geométrica decreciente de razón $(1+i)^{-1}$:

$$V_0 = \sum_{r=1}^{n}(1+i)^{-r} = \frac{(1+i)^{-1} - (1+i)^{-n}(1+i)^{-1}}{1-(1+i)^{-1}} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = a_{\overline{n}|i}$$

Para calcular el valor final, según se observa en el gráfico, sumamos todos los términos en el final de la renta n, resultando también la suma de los términos de una progresión geométrica creciente de razón $(1+i)$:

$$V_n = \sum_{r=0}^{n-1}(1+i)^{r} = \frac{(1+i)^n - 1}{i} = s_{\overline{n}|i}$$

El mismo resultado se obtiene al capitalizar el valor actual por toda la duración de la renta, puesto que ambos valores son equivalentes:

$$s_{\overline{n}|i} = a_{\overline{n}|i}(1+i)^n$$

Los valores de una renta constante de cuantía C se calculan multiplicando el valor financiero de la renta unitaria por dicha cuantía.

4.5.2. Renta unitaria, prepagable y temporal

Se diferencia de la anterior en que los términos vencen al principio de cada periodo. En la Figura 4.5 se puede ver un esquema gráfico simplificado.

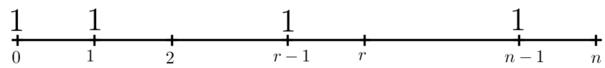

Figura 4.5: Renta unitaria, prepagable y temporal.

Su valor actual es:

$$\ddot{V}_0 = \ddot{a}_{\overline{n}|i} = \sum_{r=0}^{n-1}(1+i)^{-r} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{1-(1+i)^{-1}} = (1+i)\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

y el valor final:

$$\ddot{V}_n = \ddot{s}_{\overline{n}|i} = \sum_{r=1}^{n}(1+i)^{r} = (1+i)\frac{(1+i)^n-1}{i}$$

Nótese que $\ddot{a}_{\overline{n}|i} = (1+i)a_{\overline{n}|i}$ y $\ddot{s}_{\overline{n}|i} = (1+i)s_{\overline{n}|i}$. Esta relación entre el valor de la renta prepagable y pospagable se verifica, no sólo para las rentas unitarias, sino para todas las rentas constantes o variables, siempre que estén valoradas con rédito periodal constante.

Esta relación nos permite expresar los valores financieros en términos pospagables, siempre que todos los réditos periodales sean constantes. Al ser $i > 0$, el valor de una renta prepagable siempre es mayor que el de la pospagable con las mismas características:

$$\ddot{V}_\alpha > V_\alpha$$

4.5.3. Rentas perpetuas unitarias

Tienen una duración ilimitada en el sentido de que a cada periodo le sigue siempre otro. Sólo tiene sentido hablar de valor actual, ya que su valor final sería infinito.

El valor actual de la renta pospagable en la suma de una serie geométrica convergente, ya que la razón es menor que uno:

$$a_{\overline{\infty}|i} = \sum_{r=1}^{\infty}(1+i)^{-r}$$

Otra forma de valorar la renta perpetua es calcular el límite de los n primeros términos de la correspondiente renta temporal, cuando el número de términos tiende a infinito:

$$a_{\overline{\infty}|i} = \lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{n}(1+i)^{-r} = \lim_{n\to\infty} a_{\overline{n}|i} = \lim_{n\to\infty}\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = \frac{1}{i}$$

Por tanto, el valor actual de una renta perpetua pospagable es el recíproco de su rédito constante de valoración.

Si la renta es prepagable:

$$\ddot{a}_{\overline{\infty}|i} = \sum_{r=0}^{\infty}(1+i)^{-r} = \lim_{n\to\infty} \ddot{a}_{\overline{n}|i} = \lim_{n\to\infty}(1+i)\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = \frac{1+i}{i}$$

4.5.4. Rentas diferidas y anticipadas

Tal como indicamos al clasificar las rentas, ésta se dice diferida cuando se valora en un punto anterior al origen de la renta. Por consiguiente, sólo afecta al valor actual de la misma.

Su esquema, en el caso pospagable y temporal, se puede observar en la Figura 4.6.

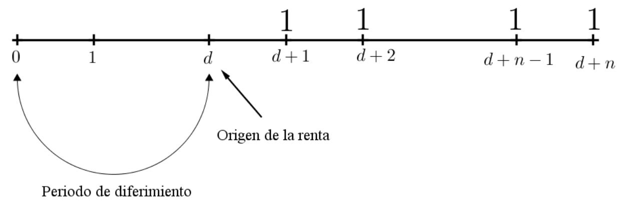

Figura 4.6: Renta diferida, pospagable y temporal.

El valor financiero de una renta diferida de cualquier tipo (constante o variable, prepagable o pospagable, temporal o perpetua, discreta o continua), es igual al valor en el origen de la renta multiplicado por el factor de contracapitalización correspondiente al periodo de diferimiento:

$$V_0 = \sum_{r=d+1}^{d+n}(1+i)^{-r} = (1+i)^{-d}\sum_{r=1}^{n}(1+i)^{-r} = u^*(0,d)a_{\overline{n}|i}$$

Cuando el rédito de valoración durante un periodo de diferimiento es el mismo que el intervalo de definición de la renta, se utiliza una notación específica:

$$d/a_{\overline{n}|i} = (1+i)^{-d}a_{\overline{n}|i}$$

La renta se dice anticipada cuando se valora en un punto posterior al final de la misma (véase Figura 4.7).

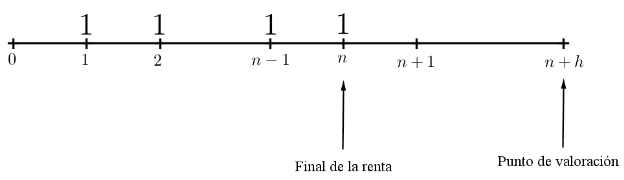

Figura 4.7: Renta anticipada, pospagable y temporal.

El valor de la renta anticipada se calcula multiplicando el valor final de la inmediata, por el factor de capitalización correspondiente al periodo de anticipación:

$$V_{n+h} = \sum_{r=h}^{n+h-1} (1+i)^r = (1+i)^h \sum_{r=0}^{n-1} (1+i)^r = u(n,h) s_{\overline{n}|i}$$

Si el rédito de valoración durante el periodo de anticipación es el mismo que el de la renta, se utiliza la notación:

$$h/s_{\overline{n}|i} = (1+i)^h s_{\overline{n}|i}$$

4.5.5. Rentas variables

Los valores actual y final de una renta discreta con términos de cuantía variable, temporal y pospagable (veáse Figura 4.8), valorada a rédito periodal constante son:

$$(V_0)_{\overline{n}|i} = \sum_{r=1}^{n} C_r (1+i)^{-r}$$

$$(V_n)_{\overline{n}|i} = \sum_{r=1}^{n} C_r (1+i)^{n-r} = (V_0)_{\overline{n}|i} (1+i)^n$$

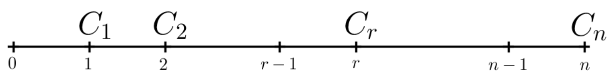

Figura 4.8: Renta variable, temporal y pospagable.

Si la renta fuese prepagable los vencimiento, y por tanto los exponentes del factor, estarían en $r-1$ en lugar de en r.

Vamos a estudiar dos casos de particular interés desde un punto de vista práctico: la renta con términos variables en progresión geométrica y en progresión aritmética.

Renta variable en progresión geométrica

Se trata de una renta en la que las cuantías de los términos varían en progresión geométrica de razón $q > 0$, llamando C a la cuantía del primer término. La cuantía del término genérico con vencimiento en r será $C_r = Cq^{r-1}$.

El valor actual de la renta se obtiene:

$$(V_0)_{\overline{n}|i} = A_{(C,q)\overline{n}|i} = \sum_{r=1}^{n} Cq^{r-1}(1+i)^{-r} = C(1+i)^{-1} \sum_{r=1}^{n} q^{r-1}(1+i)^{-(r-1)} =$$

$$= C(1+i)^{-1} \frac{1 - q^n (1+i)^{-n}}{1 - q(1+i)^{-1}} = C \frac{1 - q^n (1+i)^{-n}}{1 + i - q}$$

Este valor lo tomaremos como referencia para calcular los valores finales, valores prepagables, diferidos, anticipados y/o perpetuos, utilizando las relaciones que hemos visto para las rentas unitarias, siempre y cuando los réditos de valoración permanezcan constantes en todos los periodos.

En el caso particular de que la razón de la progresión coincida con el factor de capitalización correspondiente a un periodo unitario $q = (1+i)$, al sustituir en la expresión del valor actual que acabamos de obtener, resulta indeterminado. Para resolver la indeterminación puede calcularse en el $\lim_{q \to (1+i)} A_{(C,q)\overline{n}|i}$ y aplicar la regla de L'Hpital, o bien calcular directamente el valor actual:

$$A_{(C,(1+i))\overline{n}|i} = C[(1+i)^{-1} + (1+i)(1+i)^{-2} + \ldots + (1+i)^{n-1}(1+i)^{-n}] = C \cdot n \cdot (1+i)^{-1}$$

Si la renta tiene duración ilimitada (renta perpetua), la existencia del valor actual depende de la convergencia de la serie, y se calcula como límite de la temporal cuando el número de términos tiende a infinito.

Renta variable en progresión aritmética

La cuantía de los términos varía en progresión aritmética de razón d, el esquema de la renta temporal y pospagable su muestra en la Figura 4.9.

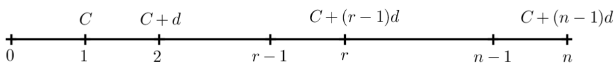

Figura 4.9: Renta variable en progresión aritmética, temporal y pospagable.

En el caso de que los términos de la renta sean decrecientes ($d < 0$), y para asegurarnos de que no aparezcan capitales negativos, hemos de imponer la restricción de que el último término sea siempre positivo:

$$C + (n-1)d > 0 \to d > \frac{-C}{n-1}$$

El valor actual de la renta se calcula:

$$A_{(C,d)\overline{n}|i} = \sum_{r=1}^{n} [C + (r-1)d](1+i)^{-r}$$

No obstante, es más sencillo descomponer la renta en suma de n rentas, tantas como términos, de la forma que se muestra en la Figura 4.10.

Una vez comprobado que la suma de las cuantías disponibles en cada vencimiento coincide con el término de la renta variable en ese mismo punto, el valor actual de la renta variable

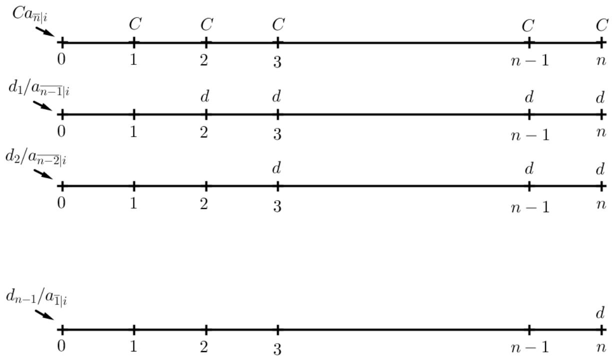

Figura 4.10: Descomposición de una renta en suma de rentas.

en progresión aritmética será igual a la suma de los valores actuales de las n rentas en que se ha descompuesto. Para abreviar mostramos el valor actual una vez operada la suma:

$$A_{(C,d)\overline{n}|i} = \ldots = \left(C + \frac{d}{i}\right) a_{\overline{n}|i} - \frac{dn(1+i)^{-n}}{i} = \left(C + \frac{d}{i} + dn\right) a_{\overline{n}|i} - \frac{dn}{i}$$

En el caso de rentas perpetuas, sólo tiene sentido para rentas crecientes, cuando la razón es positiva, y se obtiene tomando límites en la temporal cuando $n \to \infty$:

$$A_{(C,d)\overline{\infty}|i} = \lim_{n\to\infty} \left[\left(C + \frac{d}{i}\right) a_{\overline{n}|i} - \frac{dn(1+i)^{-n}}{i}\right] = \left(C + \frac{d}{i}\right)\frac{1}{i}$$

Si el rédito periodal de valoración permanece constante, podemos calcular el valor financiero de cualquier renta variable con progresión aritmética, en función del valor actual de la renta inmediata pospagable y temporal.

4.5.6. Rentas fraccionadas

El fraccionamiento aritmético de una renta consiste en dividir las cuantías de sus términos en m subcuantías, tales que su suma aritmética coincida con la cuantía inicial, y paralelamente descomponer cada periodo de maduración en m subperiodos consecutivos y disjuntos, asociando una subcuantía a cada uno de los subperiodos.

El fraccionamiento de frecuencia m transforma una renta de n términos en otra de $n \times m$, la suma aritmética de las cuantías de las dos rentas es la misma, pero no su valor financiero porque hemos modificado los vencimientos de los capitales.

Si fraccionamos una renta pospagable genérica, variable y valorada con una ley de capitalización, el esquema de cada periodo antes y después de fraccionarlo aritméticamente se puede observar en la Figura 4.11.

Para valorar una renta fraccionada, sumamos en t_r todos los términos fraccionados comprendidos en el intervalo $(t_{r-1}, t_r]$:

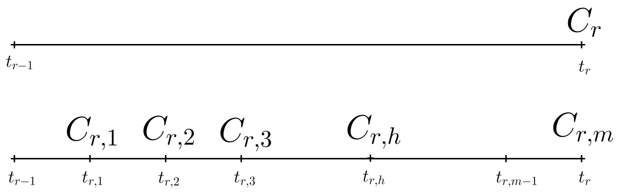

Figura 4.11: Fraccionamiento de una renta.

$$C'_r = \sum_{h=1}^{m} C_{r,h} \cdot u(t_{r,h}, t_r; p) > C_r$$

El valor de la renta fraccionada equivale a sustituir en la renta sin fraccionar de la que procede, cada término C_r por el correspondiente C'_r en cada intervalo.

Cuando la renta de partida es pospagable, el fraccionamiento supone un mayor valor financiero para la nueva renta. Si la renta original es prepagable, el valor financiero de la renta fraccionada será menor que el de la renta de partida.

El fraccionamiento se dice uniforme cuando tanto las cuantías como los periodos se dividen en partes iguales, es decir, la cuantía del término genérico en la renta fraccionada será:

$$C_{r,h} = \frac{C_r}{m}, \forall h.$$

El valor actual de una renta fraccionada es:

$$V_0^{(m)} = \sum_{r=1}^{n} C_r \frac{i}{j_{(m)}} (1+i)^{-r} = \frac{i}{j_{(m)}} V_0$$

donde $j_{(m)} = m \cdot i^{(m)}$ e $i^{(m)} = (1+i)^{1/m} - 1$.

El fraccionamiento de las rentas es habitualmente un fraccionamiento aritmético, no obstante en algunas operaciones podemos encontrarnos con fraccionamientos financieros que son totalmente distintos.

4.6. Rentas continuas

La renta continua es un conjunto de infinitos capitales de cuantía infinitesimal, disponibles en cada instante de tiempo, correspondiendo una cuantía nula a cada vencimiento.

La cuantía que vence en un intervalo infinitesimal se llama cuantía elemental, se expresa como producto de la densidad en t por la amplitud del intervalo, $C(t)dt$, es el equivalente a la cuantía del término en la renta discreta.

El valor financiero en α de una renta continua, definida en el intervalo (t_0, t_n) según una ley $F(t; p)$, es:

$$\left(\overline{V}_{\alpha}\right)_{\overline{t_0,t_n}|F} = \int_{t_0}^{t_n} \frac{F(t;p)}{F(\alpha;p)} C(t)dt$$

En capitalización compuesta, el valor actual de la renta se obtiene:

$$\left(\overline{V}_{t_0}\right)_{\overline{t_0,t_n}|i} = \int_{t_0}^{t_n} (1+i)^{-(t_0-t)} C(t)dt$$

y el valor final:

$$\left(\overline{V}_{t_n}\right)_{\overline{t_0,t_n}|i} = \int_{t_0}^{t_n} (1+i)^{t_n-t} C(t)dt = \left(\overline{V}_{t_0}\right)_{\overline{t_0,t_n}|i} (1+i)^{t_n-t_0}$$

En la rentas continuas unitarias, la función de densidad es $C(t) = 1$, lo que significa que en cada intervalo unitario vence una unidad de capital, pero repartida uniformemente en el periodo. Su valor actual es:

$$\overline{a}_{\overline{n}|i} = \int_{0}^{n} (1+i)^{-t} dt = \frac{1-(1+i)^{-n}}{\log_e(1+i)} = \frac{i}{\log_e(1+i)} a_{\overline{n}|i}$$

y podemos expresar el valor de la renta continua unitaria en función del valor actual de la renta unitaria discreta.

HOJA DE EJERCICIOS TEMA 4

1. Obténganse los valores actual y final de una renta definida por los capitales $(100, 1)$, $(150, 4)$, $(25, 5)$ y $(70, 8)$ asociados a los periodos $(0, 1)$, $(1, 4)$, $(4, 5)$ y $(5, 8)$, siendo los réditos de capitalización para cada uno de los periodos $i_1 = 0,05$, $i_2 = 0,1$, $i_3 = 0,03$ e $i_4 = 0,06$.

2. Determínese el valor en $\alpha = 0$ y $\alpha' = 12$ de una renta con términos de cuantía constante $C = 30$ y vencimientos 3, 4, 6 y 8 asociada a los periodos $(0, 3)$, $(3, 4)$, $(4, 6)$ y $(6, 8)$ si se valora en capitalización compuesta a rédito constante anual $i = 0,1$.

3. Calcúlese el valor en $\alpha = 4$ y en $\alpha' = 2,5$ de una renta pospagable de términos $(2, 1)$, $(4, 2)$, $(6, 3)$ y $(8, 4)$ si se valora en capitalización compuesta a rédito constante anual $i = 0,09$.

4. Calcúlense los valores inicial y final de una renta discreta, inmediata y pospagable, formada por diez términos de cuantía constante 100 euros y valorada a rédito periodal constante del 5 %.

5. Hállense el valor inicial y final de una renta prepagable de cinco años de duración y cuantía constante anual 200 euros, si se valora a rédito periodal constante $i = 0,05$.

6. Calcúlense los valores actual y final de una renta inmediata y pospagable de cuantía constante 1.000 euros si se valora a rédito periodal constante del 6 % y su duración es: 5, 10, 50, 100, ∞ años. Coméntese, asimismo, los resultados.

7. Obténgase el valor actual de una renta prepagable de cuantía anual 1.000 euros si su duración es indefinida y se valora a rédito anual constante:

   a) 3 %

   b) 6 %

   c) 9 %

8. Obténganse los valores actual y final de una renta de cuantía anual constante 500 euros, valorada a rédito anual del 8 % en los casos siguientes:

   a) Renta inmediata, pospagable y perpetua.

   b) Renta diferida cuatro años, prepagable y de diez años de duración.

9. Calcúlese el valor en estos momentos de una renta anual que comenzará a devengarse dentro de tres años y medio, sabiendo que está constituida por 10 términos pospagables de cuantía 100 euros y que se valora en capitalización compuesta a tanto efectivo anual del 6 %.

10. Calcúlese en estos momentos el valor de una renta de cuantía anual constante 100 euros y valorada a rédito anual del 6 % que comenzó a devengarse hace 20 años, en los supuestos:

    a) Pospagable y habiendo vencido el último término hace cinco años.

    b) Prepagable y de 12 términos.

11. Determínese el valor inicial de una renta pospagable de 12 años de duración y valorada a rédito anual constante i, sabiendo que su cuantía anual es, C para los 4 primeros años, $2C$ para los 4 siguientes y $3C$ para los restantes.

12. Calcúlese el valor actual de una renta prepagable de cuantía anual 200 euros y 5 años de duración, si para su valoración se utiliza un rédito constante anual del 5 % los 3 primeros años y del 4 % los restantes.

13. Obténgase el valor actual de una renta perpetua, con términos anuales de cuantía 500 euros percibiéndose el primero transcurridos seis años desde el momento actual, en los casos:

    a) Valorada a rédito anual constante del 6 %.

    b) Tomando como réditos anuales de valoración el 5,5 % durante los próximos 10 años, el 6 % durante los 10 siguientes y el 7 % en los restantes. Cuál sería el rédito medio de valoración de la renta, en este caso?

14. Cierta persona concierta con una entidad financiera un plan de ahorro para formar un capital de 50.000 euros en 15 años. Calcúlese la cantidad que tendrá que ingresar al principio de cada año si la entidad abona intereses al 6 % constante anual. Si transcurridos 8 años la entidad decide incrementar en un punto la remuneración de sus pasivos, calcúlese la cuantía de la anualidad a ingresar a partir de ese momento para obtener la suma citada.

15. Obténgase el valor de una renta pospagable, anticipada 3 años, y de 10 de duración, si los términos anuales son de cuantía constante C los 6 primeros años y $1,5C$ los restantes, y se valora a rédito constante anual $i_1 = 0,08$ los 4 primeros años e $i_2 = 0,07$ los restantes. En función del valor obtenido, calcúlese el valor en el origen de la renta.

16. Determínese el valor actual de los dividendos que percibirá el señor X durante los próximos 15 años bajo la hipótesis siguiente: el primer año los dividendos ascenderán a 500 euros, estimándose un incremento anual acumulativo del 3 % para los 10 primeros años y suponiendo que permanecerá constante la cuantía a percibir en los 5 años restantes. Rédito de valoración constante anual $i = 5\,\%$.

17. Los ingresos netos de una empresa ascendieron en el pasado año a un millón de euros y se espera un crecimiento anual del 10 % sobre esta cantidad. Determínese la cuantía de que podría disponer la empresa al cabo de 15 años si coloca al final de cada uno de ellos el 50 % de los ingresos obtenidos en el mismo, en una entidad que capitaliza el 4 % anual.

18. Una persona que percibe actualmente un sueldo neto anual de 40.000 euros ahorra el 25 % de sus ingresos y los deposita al final de cada año en una entidad bancaria que capitaliza a rédito anual constante $i = 0,05$. Determínese la cuantía de que podrá disponer al cabo de 10 años en el supuesto de que las subidas salariales sean del 8 % anual acumulativo durante los cinco primeros años y del 6 % durante los restantes.

19. Calcúlese el valor actual de los ingresos de la empresa Z en los próximos 5 años, teniendo en cuenta los siguientes datos:

    - Dicha empresa se dedica a la fabricación de calzados, ascendiendo su producción en el presente año a 200.000 pares y estimándose un incremento anual de 20.000 pares en años sucesivos.
    - Un 60 % de la producción se destina a la exportación.
    - El precio medio por unidad se estima en 100 euros, para el mercado interior y 80 para el exterior.
    - Tanto de valoración 6 % constante anual.

20. Calcúlense los valores final y actual de una renta pospagable trimestral de cuantía constante 200 euros, tres años de duración y valorada en capitalización simple de parámetro $i = 8\,\%$ anual. El punto p de aplicación de la ley coincide con el final de la renta.

21. Cierta persona compra un equipo DVD, pantalla y altavoces para instalar el cine en casa, cuyo precio de contado asciende a 7.000 euros, ofreciéndole el vendedor la modalidad de pago aplazado abonando una entrada del 20 % al contado y el resto en 24 meses, aplicando un recargo mensual del 0,8 %. Calcúlense:

    a) Cuantía de cada plazo.

    b) Tanto de coste de la operación, medido en capitalización simple y en capitalización compuesta.

22. Calcúlese el valor actual de una renta anual, prepagable, de términos (12.000, 0), (16.000, 1), (20.000, 2) con fraccionamiento uniforme de frecuencia $m = 4$, si se valora en capitalización compuesta a rédito anual $i = 0,10$.

23. El señor X posee un inmueble cuyo alquiler le proporciona unos ingresos al principio de cada mes de 3.000 euros y unos gastos al final de cada semestre de 2.000 euros. Además cada 3 años está previsto realizar diversos arreglos con un coste estimado de 5.000 euros. Se pide determinar al valor financiero del citado inmueble, sin considerar variación en los ingresos y costes y tomando como rédito de valoración el 8 % anual.

24. Cierta persona con derecho a percibir en los próximos cinco años una pensión anual de 50.000 euros iniciales, revalorizable anualmente en un 2 %, solicita su fraccionamiento en pagos mensuales. Determínese la cuantía de las mensualidades que debería recibir sabiendo que el tanto de valoración a utilizar es el 4 % efectivo, en los casos:

    a) Mensualidades constantes dentro de cada año, con un incremento acumulativo anual del 2 %.

    b) Mensualidades crecientes en progesión geométrica a una tasa acumulativa del $0,2\,\%$ mensual.

    Nota: Se supone que todos los pagos se efectúan el final del periodo correspondiente.

25. Cierto grupo financiero se plantea a comienzo de año la compra de un hotel que se espera proporcione unos ingresos netos de 60.000 euros al final de cada mes durante los meses de temporada alta (julio, agosto y septiembre); 30.000 euros durante la temporada media (abril, mayo y junio), cubriéndose únicamente gastos el resto del año. Si se estima que en años sucesivos estos ingresos se incrementarán a razón de un 10 % acumulativo anual, determínese el precio máximo que estará dispuesto a pagar el citado grupo, si pretende obtener una rentabilidad mínima del 15 % sobre el capital invertido.

26. Un trabajador que percibe un sueldo diario de 50 euros durante un total de 300 días al año, ahora el 10 % del mismo durante 10 años. Si dichos ahorros los ingresa diariamente en una entidad que emplea como rédito de valoración el 6 % anual, calcúlese la cuantía de que podría disponer al cabo de esos 10 años.

27. Determínese el valor actual de los ingresos estimados por la empresa concesionaria de una autopista en los próximos veinticinco años, sabiendo que espera dar servicio a un promedio de 1.000 vehículos diarios, siendo el peaje 10 euros por vehículo para el primer año, incrementándose en un 3 % acumulativo anual en años sucesivos. Rédito de valoración anual $i = 0,08\,\%$.

28. La Sociedad Anónima X estudia un proyecto de inversión consistente en el montaje de un determinado servicio, cuyas instalaciones significan un gasto inicial de un millón de euros y unos gastos periódicos de cuantía 100.000 euros durante los tres primeros años, decreciendo después a razón de un 8 % anual sobre esta cantidad. Los ingresos

se estiman en el 70 % de los gastos anuales durante los tres primeros años creciendo un 10 % acumulativo a partir del tercero. Suponiendo que la explotación del servicio se realice durante 15 años al cabo de los cuales se traspasa a un tercero por 7.050.000 euros, calcular el tanto de rendimiento del proyecto.

29. Un estudiante prevé que va a tener los siguientes gastos durante los cinco años de carrera:

    - Gastos de matrícula 760 euros los dos primeros años, subiendo a 860 euros los tres siguientes. Estas cantidades se pagan el 50 % el 1 de octubre de cada año y el resto el 1 de enero del año siguiente.
    - Gastos de material 150 euros al comiendo de cada uno de los dos semestres del curso, 1 de octubre y 15 de febrero.
    - Gastos de manutención y alojamiento 450 euros mensuales a pagar al final de cada mes durante los nueve meses de curso (de octubre a junio) durante el primer año, incrementándose a razón de un 5 % acumulativo anual en años sucesivos.

    Determínese la cantidad que tendrá que depositar en estos momentos, al inicio de la carrera, en una entidad financiera que capitaliza al 3 % anual, para poder hacer frente a estos pagos.

Capítulo 5

Operaciones financieras

5.1. Concepto y elementos

Se denomina operación financiera a todo intercambio no simultáneo de capitales financieros. Este intercambio se presenta, en la práctica, entre dos personas naturales o jurídicas. La persona que entrega el primer capital inicia la operación como acreedor y a su compromiso total se le denomina **prestación**. La persona que recibe ese primer capital tiene la condición de deudor inicial y a su compromiso se le denomina **contraprestación**. Para que sea posible este intercambio, debe existir mutuo acuerdo entre los agentes económicos implicados, lo cual supone un equilibrio entre las valoraciones que de cada conjunto de capitales realice cada uno de los agentes.

Por tanto, los elementos que la definen son:

- Los capitales financieros que se intercambian, que se denominan prestación y contraprestación.
- Las partes que intervienen en la operación: prestamista que es el que entrega el primer capital y prestatario que es el que recibe ese primer capital.
- El criterio financiero de valoración. De acuerdo con el cual se establece el equilibrio entre los compromisos de ambas partes.

Como principio básico imprescindible para expresar matemáticamente el citado equilibrio se establece el siguiente postulado denominado de equivalencia financiera: *Toda operación financiera implica la existencia de una equivalencia financiera de las sumas de capitales respectivas de la prestación y contraprestación en base a una ley financiera establecida.*

Cuando la ley financiera es conocida, la operación se denomina **perfecta**. En caso contrario la operación se denomina **imperfecta**. A este tipo de operaciones pueden asimilarse las llamadas operaciones de inversión.

Se considera el vencimiento del primer capital (que pertenece a las prestación) como el origen de la operación, el vencimiento del último (puede pertenecer a la prestación o a la contraprestación) como final de la operación y la duración de la misma al tiempo que media entre ambos.

5.2. Clasificación

Las operaciones financieras pueden clasificarse atendiendo a distintos criterios:

1. **Por la naturaleza de los capitales que integran la operación**:
   - Ciertas, en las que todos los capitales que intervienen son ciertos, tanto en cuantía como en vencimiento.
   - Aleatorias, si al menos algún capital es de esta naturaleza en cuantía o vencimiento.
2. **Por la forma de su definición**:
   - Pre-determinadas, cuando desde el inicio se conocen todos los elementos que intervienen en la operación.
   - Post-determinadas, cuando algún elemento sólo es posible conocerlo al final de la misma.
3. **Por el grado de liquidez interna**:
   - Si se establecen en el contrato las condiciones para cancelar la opración en cualquier momento o requiere el acuerdo de las partes.

   No confundir con la liquidez externa, que puede obtenerse al transferir la operación a terceras personas que se subrogan en los derechos u obligaciones del cedente.
4. **Por la duración**:
   - A corto y a largo plazo (el límite suele ser un año).
5. **Por la distribución de los compromisos adquiridos**:
   - Simples, cuando prestación y contraprestación están formadas por un solo capital.
   - Compuestas, cuando están formadas por varios capitales.
6. **Por el criterio de valoración que las sustenta**:
   - Capitalización
   - Descuento
   - Mixta, cuando intervienen ambos tipos de leyes financieras.

7. **Por el número de leyes financieras que intervienen en la operación**:
   - Homogéneas, cuando los compromisos se valoran con una única ley.
   - Heterogéneas, cuando se valoran con distintas leyes.
8. **Por el sentido crediticio de la operación**:
   - Crédito unilateral, cuando la parte que inicia la operación como acreedora (deudora) conserva su posición hasta el final de la misma.
   - Crédito recíproco, cuando no se cumple la condición anterior.
9. **Por incluir o no características comerciales**:
   - Puras, cuando los capitales entregados por el prestamista los recibe íntegramente el prestatario y viceversa.
   - Con características comerciales, cuando existen otros capitales que las partes pagan o cobran.

5.3. Equivalencia financiera

En toda operación ha de verificarse el postulado de equivalencia financiera enunciado anteriormente.

Sea una operación financiera cierta, compuesta y homogénea de acuerdo con la ley financiera $F(t;p)$ y de:

- Prestación: $(C_1, t_1), (C_2, t_2), \ldots, (C_m, t_m)$
- Contraprestación: $(C'_1, t'_1), (C'_2, t'_2), \ldots, (C'_n, t'_n)$

siendo t_1 el origen y t'_n el final de la operación, el postulado de equivalencia permite escribir $(C_i, t_i) \sim (C'_j, t'_j)$ para $i = 1, 2, \ldots, m$ y $j = 1, 2, \ldots, n$.

- En p:
$$V = \sum_{i=1}^{m} C_i F(t_i; p) = \sum_{j=1}^{n} C'_j F(t'_j; p) = V'$$
- En un punto cualquiera τ tal que $\tau \in [t_1, t'_n]$:
$$S = \sum_{i=1}^{m} C_i \frac{F(t_i; p)}{F(\tau; p)} = \sum_{j=1}^{n} C'_j \frac{F(t'_j; p)}{F(\tau; p)} = S'$$

  donde (S, τ) y (S', τ) representan la suma financiera de la prestación y de la contraprestación en dicho punto respectivamente.

5.4. Reserva matemática o saldo financiero

Si en una operación financiera se produce una cancelación antes de su final, es evidente que una o las dos partes no habrán hecho frente a sus obligaciones de forma completa, con lo cual se habrá roto el equilibrio financiero.

Definición 5.1 *La **reserva matemática** o **saldo financiero** de la operación es el capital financiero que en cada momento recoge la cuantificación de la diferencia entre el valor financiero de los capitales entregados por una y otra parte.*

Supuesto que τ es un punto intermedio de la operación que divide a ésta en dos partes $[t_1, t'_n] = [t_1, \tau] \cup (\tau, t'_n]$ sin elementos comunes (τ está incluido en el primer sub-intervalo), los compromisos anteriores a τ y los compromisos posteriores a τ, (S, τ) y (S', τ), pueden descomponerse de la siguiente forma: $S = S_1 + S_2 = S'_1 + S'_2 = S'$, de donde se obtiene la cuantía de la reserva matemática por la derecha:

$$R_\tau^+ = S_1 - S'_1 = S'_2 - S_2$$

La reserva matemática o saldo financiero R_τ^+ es, por tanto, el capital financiero que en cada momento recoge la diferencia entre el valor financiero de los capitales entregados por ambas partes $(S_1 - S'_1)$ y también de los que faltan por entregar $(S'_2 - S_2)$, todos ellos valorados en τ.

En definitiva, es el capital que tendría que entregar la parte deudora en ese momento para cancelar o saldar la operación, es decir, para restablecer el equilibrio financiero. El valor absoluto de la reserva indica la cuantía necesaria para conseguirlo y el signo de la misma a cual de las dos partes corresponde entregarla.

El signo positivo del saldo R_τ^+ indica que la prestación entregada ha sido mayor que la contraprestación recibida. Un signo negativo de este saldo indica, por razonamiento análogo, que éste sería a favor de la contraprestación.

La reserva matemática puede calcularse por tres métodos:

- Método retrospectivo, en función de la parte de operación realizada con anterioridad al punto de cálculo: $R_\tau^+ = S_1 - S'_1$.

- Método prospectivo, en función de los compromisos futuros, es decir, posteriores a dicho punto: $R_\tau^+ = S'_2 - S_2$.

- Método recurrente, en función de la reserva obtenida en un momento anterior y en la parte de operación comprendida entre ambos.

Si la partición del intervalo se realiza dejando el punto τ en el segundo sub-intervalo tal que $[t_1, t'_n] = [t_1, \tau) \cup [\tau, t'_n)$ la reserva se obtiene a la izquierda de dicho punto, y se denota por R_τ^-. La distinción entre derecha e izquierda sólo es necesaria cuando haya capitales que tengan su vencimiento en el punto de cálculo τ, siendo la diferencia entre ambos precisamente la cuantía del capital con vencimiento en τ.

$$R_\tau^- = R_\tau^+ - C_\tau \quad \text{si } C_\tau \text{ pertenece a la prestación}$$

$$R_\tau^- = R_\tau^+ + C'_\tau \quad \text{si } C'_\tau \text{ pertenece a la contraprestación}$$

5.5. Valor financiero de una operación

Cuando se pacta una operación financiera, la ley establece la equivalencia financiera viene a reflejar el nivel de tipos de interés vigente en el mercado financiero en ese momento.

Con el paso del tiempo mientras la operación continua en vigor, los tipos de interés pueden evolucionar a la alza o a la baja. Situados en un punto intermedio de la operación, la reserva matemática o saldo financiero restablece el equilibrio financiero de acuerdo con la ley inicialmente pactada, pero puede que no se ajuste a las nuevas condiciones del mercado. En este caso conviene valorar la parte de operación pendiente de realizar con las condiciones actuales del mercado y esta valoración se denomina **valor financiero de la operación**. Será un capital cuya cuantía se calcula de forma similar por el método prospectivo pero con la nueva ley externa o de mercado.

5.6. Características comerciales en las operaciones financieras

Una vez definida la operación financiera como el intercambio de los capitales de la prestación y de la contraprestación, y planteada la ecuación de equivalencia financiera de acuerdo con la ley pactada, en la práctica es habitual que las operaciones incorporen unas condiciones complementarias denominadas **características comerciales**, que modifican el valor de la prestación o de la contraprestación. Al incorporar dichas características, deja de cumplirse la equivalencia financiera según la ley inicialmente pactada.

Las características comerciales se clasifican en bilaterales y unilaterales y se traducen en entradas o salidas de capitales adicionales y en modificaciones de las cuantías y/o vencimientos de los capitales de la prestación y/o contraprestación. Pueden afectar no sólo a las partes contratantes, sino también a terceros.

5.7. Rédito medio. Tanto efectivo medio

Para el prestamista o sujeto activo de una operación financiera, realizar ésta supone una inversión de capital, mientras que para el prestatario o sujeto pasivo es una forma de financiación. Ambas partes pueden plantearse elegir entre distintas alternativas. Por ello en igualdad de otras condiciones la decisión de invertir se basará en la obtención del máximo rendimiento y la de financiarse en conseguirlo al mínimo coste.

Como medida de coste o rendimiento suele utilizarse el rédito anual o tanto efectivo de la ley de capitalización compuesta según la cual se verifica la equivalencia financiera entre prestación y contraprestación.

Si la ley que define la operación es capitalización compuesta y no existen características adicionales que modifiquen los compromisos iniciales, el rédito anual de la ley proporciona la información de coste o rendimiento.

Sin embargo, si la ley pactada es distinta e incluso establecen al margen de la ley condiciones complementarias que modifican los compromisos, ha de calcularse el valor de un nuevo parámetro.

Supuesta una operación pura de n periodos de duración y concertada de acuerdo con los réditos $i_r, \forall r = 1, 2, \ldots, n$, se denomina rédito medio de la misma, al rédito constante i_m que aplicado a todos los periodos en sustitución de los variables, hace que siga verificándose la equivalencia financiera. Al ser todos los periodos de la misma amplitud, i_m responde al rédito de capitalización compuesta para periodos de dicha amplitud y de acuerdo con él se puede obtener el rédito medio anual o tanto efectivo medio.

Si la amplitud de los periodos no es uniforme, puede obtenerse directamente el tanto efectivo que se define como el rédito anual de la capitalización compuesta que hace que se cumpla la equivalencia financiera de la operación.

5.8. Tanto anual equivalente (T.A.E.)

La Circular 8/1990 de 7 de septiembre del Banco de España, sobre Transferencia de las operaciones y protección de la clientela, dirigida fundamentalmente a las entidades de crédito, establece las normas para determinar el T.A.E. constituyendo el parámetro indicativo del coste o rendimiento de las operaciones financieras.

Según la Circular *los tipos de interés, costes o rendimientos efectivos de las operaciones financieras, se expresarán en tasas porcentuales pagaderas a término vencido equivalentes*, es decir, mediante el tanto anual de capitalización compuesta.

El T.A.E. (tanto o tasa anual equivalente) se obtiene *igualando en cualquier fecha el valor actual de los efectivos recibidos y entregados a lo largo de la operación por todos los conceptos incluido el saldo remanente a su término con las excepciones e indicaciones que se recogen en los siguientes apartados.*

La expresión general para la obtención del T.A.E. es:

$$\sum_{n=1}^{n} D_n(1+i_k)^{-t_n} = \sum_{m=1}^{m} R_m(1+i_k)^{-t_m}$$

siendo:

- D = disposiciones.
- R = reembolsos.
- n = número de entregas.
- m = número de reembolsos.
- t_n = tiempo transcurrido desde la fecha de referencia hasta la de disposición n.
- t_m = tiempo transcurrido desde la fecha de referencia hasta la de reembolso m.
- i_k = tanto por uno efectivo referido al periodo de tiempo elegido para expresar los vencimientos en números enteros.

de donde se obtiene la tasa anual equivalente i (T.A.E.):

$$i = (1 + i_k)^k - 1$$

siendo k el número de veces que el año contiene al periodo elegido.

El T.A.E. coincide, en principio, con el tanto efectivo de la operación, en cuanto que se utiliza capitalización compuesta. Pero al tener en cuenta las excepciones e indicaciones que recoge la Circular para cada tipo de operaciones, puede precisarse que el T.A.E. representa más el tanto efectivo para la entidad financiera (rendimiento con algunas precisiones) pero no mide el tanto de coste para el cliente de dicha entidad, lo que puede inducir a erróneas interpretaciones.

HOJA DE EJERCICIOS TEMA 5

1. Sea una operación financiera compuesta definida por:

   Prestación: $(2C, t_0 + 1)$, $(2C, t_0 + 4)$ y $(5C, t_0 + 6)$.

   Contraprestación: $(3C, t_0 + 2)$, $(4C, t_0 + 5)$ y $(X, t_0 + 9)$.

   Valorada de acuerdo con la ley financiera de capitalización $L(t; p) = 1 + 0,10(p - t)$ con $p = t_0 + 10$. Determínese:

   a) La cuantía X.

   b) La reserva matemática a la derecha y a la izquierda del punto $\tau = t_0 + 4$ por los métodos retrospectivo y prospectivo.

   c) La reserva en $\tau' = t_0 + 8$ por el método recurrente a partir del saldo calculado en $\tau = t_0 + 4$.

2. Cierta persona se compromete a depositar anualmente en una entidad financiera la cantidad de 2.500 euros durante cinco años, efectuando la primera imposición el 1-11-2005, a cambio de que la entidad le facilite el capital equivalente a las 5 imposiciones una vez efectuadas un mínimo de tres. Si la operación se concertó de acuerdo con la ley financiera de valoración $A(t; p) = (1 - 0,1)^{t-p}$ con p situado en el 1-11-2005. Determínese la cuantía que percibirá la citada persona si solicita el capital con fecha 1-5-2008.

   Como consecuencia de este resultado, calcúlese la reserva matemática en cada uno de los puntos de vencimiento, representando gráficamente su evolución y clasificar la operación.

3. Una persona entrega 500 euros al principio de cada uno de los trimestres del año 2005 y retira 750 euros al final de cada semestre del mismo año. Si la ley financiera de valoración para las imposiciones es $L(t; p) = 1 + 0,10(p - t)$ y $L'(t; p) = 1 + 0,12(p - t)$ para los reintegros, con $p = 31$ de diciembre en ambos casos, y p y t expresados en años. Determínese el saldo de la operación.

4. El Sr. García viene prestando a su amigo, el Sr. Pérez, determinadas cuantías en las fechas:

   10.000 euros en 30-11-02

   15.000 euros en 30-11-03

   20.000 euros en 30-05-04

   El Sr. Pérez se compromete a devolverlas abonando:

   8.000 euros el 30-05-03

12.000 euros el 30-09-04

y la cuantía necesaria el 30-05-05 para que ambos conjuntos de capitales sean equivalentes a rédito constante anual del $3\,\%$. Determínese:

a) Cuantía del capital con vencimiento 30-05-05.

b) Reserva matemática o saldo financiero el 30-05-04.

c) Si el Sr. Pérez decide cancelar la operación el 30-12-04, determinar la cuantía que debería entregar al Sr. García en función del saldo calculado en el apartado anterior y teniendo en cuenta que ha de abonar unos gastos por cancelación anticipada del $0,5\,\%$ sobre la reserva en ese momento.

Capítulo 6

Operaciones financieras simples

6.1. Concepto. Equivalencia Financiera. Reserva matemática

Se define como toda operación en la que la prestación y la contraprestación están formadas por un solo capital.

Las leyes financieras más utilizadas en la práctica para establecer la equivalencia financiera entre ambos capitales son: descuento simple comercial, capitalización simple y capitalización compuesta, dando origen a distintos tipos de operaciones en el mercado, por ejemplo, descuento comercial, préstamo simple, depósitos y activos financieros (como Letras del Tesoro, pagarés, etc.)

Sea una operación financiera de prestación (C_0, t_0) y contraprestación (C_n, t_n) y $F(t;p)$ la ley financiera de valoración a través de la cual se establece la equivalencia financiera:

$$C_0 F(t_0;p) = C_n F(t_n;p)$$

obteniéndose:

$$C_0 = C_n \frac{F(t_n;p)}{F(t_0;p)} \quad C_n = C_0 \frac{F(t_0;p)}{F(t_n;p)}$$

La cuantía de la reserva matemática en un punto intermedio $t_0 < \tau < t_n$ vendrá dada por:

$$R_\tau = C_0 \frac{F(t_0;p)}{F(\tau;p)} = C_n \frac{F(t_n;p)}{F(\tau;p)}$$

en función del capital inicial (método retrospectivo) o del capital final (método prospectivo).

A continuación se analizan más detalladamente el descuento comercial y otros tipos de operaciones como préstamo simple, Letras del Tesoro, etc.

6.2. Descuento bancario

Se entiende por descuento bancario al hecho de abonar al cliente en dinero el importe de un título de crédito no vencido (efecto comercial, letra de cambio, etc.) descontado el tiempo que media hasta su vencimiento de acuerdo con la ley de descuento simple comercial.

Las dos modalidades más frecuentes son: el descuento comercial y el descuento financiero.

El descuento comercial proporciona liquidez al descontar efectos comerciales procedentes de transacciones u operaciones comerciales con pago aplazado. El descuento financiero representa una modalidad para instrumentar un préstamo bancario.

Los elementos de la operación son:

- El primer capital, que recibe el nombre de efectivo y tiene su vencimiento en la fecha que se realiza el descuento.
- El segundo capital, denominado nominal del título con vencimiento en la fecha especificada en el documento.

Ambos son equivalentes según la ley financiera de descuento simple comercial y la diferencia entre nominal y efectivo se la conoce como descuento practicado.

$$A(t;p) = 1 - d(t-p) \quad t > p$$

$$E = N[1 - d(t-p)] = N - D$$

donde:

- E = efectivo.
- N = nominal.
- D = descuento practicado.
- t = fecha de vencimiento del nominal.
- p = fecha de vencimiento del efectivo que coincide con el punto p de aplicación de la ley de descuento.

Si d viene expresado en años como es habitual y la diferencia $(t-p) = n$ en días, la equivalencia puede escribirse:

$$E = N\left(1 - d\frac{n}{360}\right) = N - Nd\frac{n}{360} = N - D$$

Para obtener el coste o rendimiento de la operación es preciso establecer la equivalencia financiera según la ley de capitalización, es decir, obtener el parámetro i que representa el tanto de capitalización equivalente al tanto de descuento d aplicado.

Si se utiliza capitalización simple $L(t;p) = 1 + i(p - t)$ con $p > t$:

$$E\left(1 + i\frac{n}{360}\right) = N$$

la relación entre d e i viene dada a través de:

$$i = \frac{d}{1 - d\frac{n}{360}} \quad \text{o bien} \quad d = \frac{i}{1 + i\frac{n}{360}}$$

siendo i el tanto anual equivalente al tanto de descuento aplicado. Nótese que $i > d$.

Si se utiliza capitalización compuesta $L(t;p) = (1 + i)^{p-t}$ con $p > t$:

$$E(1 + i)^{\frac{n}{360}} = N \quad \text{de donde} \quad i = \left(\frac{N}{E}\right)^{\frac{360}{n}} - 1$$

siendo i el tanto efectivo.

6.2.1. Características comerciales y tantos efectivos

Las características comerciales más comunes para este tipo de operaciones son:

- Comisión por negociación que percibe la entidad financiera y abona el cliente. Suele ser un porcentaje del nominal del efecto, independientemente de la duración de la operación (generalmente se establece un mínimo en términos absolutos). Su importe depende de que los efectos estén o no domiciliados y/o aceptados.

- El Timbre que representa el Impuesto sobre Actos Jurídicos Documentados y repercute en el cliente. Se establece en unidades monetarias a través de una escala según cuantía de nominal y vencimiento.

- Otros gastos, por ejemplo correo, fax, corretaje, etc.

- Retenciones. A veces la entidad financiera exige al cliente que un porcentaje del nominal del efecto sea mantenido como saldo en una cuenta de depósito.

El coste para el cliente o la rentabilidad para la entidad financiera dependerá de qué tipo de características comerciales le sean repercutibles. Por ejemplo, el coste para el cliente en una operación de descuento con las siguientes características: comisión de negociación g expresada en tanto por uno, timbre T, será:

$$E' = E - gN - T = N\left(1 - d\frac{n}{360}\right) - gN - T$$

Si también existe retención r expresada en tanto por uno sobre el nominal, el efectivo resultante será:

$$E'' = E - gN - T - rN$$

El coste medido en capitalización simple se obtendrá, en el primer caso:

$$E'\left(1+i\frac{n}{360}\right)=N \quad \text{de donde} \quad i=\left(\frac{N}{E'}-1\right)\frac{360}{n}$$

Si hay retención, lógicamente se recuperará al final de la operación incrementada con sus intereses, por lo que habrá que tenerlo en cuenta minorando la cuantía que se ha de devolver en ese momento.

Supuesto que el importe de la retención se remunere al i_r anual expresado en tanto por uno, se establece la equivalencia financiera obteniéndose i'' que representa el coste medido igualmente a través de la ley de capitalización simple:

$$E''\left(1+i''\frac{n}{360}\right)=N-\left[rN\left(1+i_r\frac{n}{360}\right)\right]$$

No obstante, el coste o rendimiento pueden venir expresados a través de los tantos efectivos obtenidos con la ley de capitalización compuesta.

El Banco de España establece además una normativa de obtención de tantos efectivos (Circular 8/90) para distintas operaciones financieras, cuya metodología implica precisamente la utilización de esta ley financiera, obteniéndose de acuerdo con ella, los denominados tantos anuales equivalentes (T.A.E.) que se corresponde con el tanto de interés efectivo anual. Dicha T.A.E. sirve de indicador de precios tanto para las entidades financieras, como para los clientes y constituye una expresión homogénea y comparable con otros tipos de interés del mercado.

Así, para determinar los tantos efectivos de acuerdo con la capitalización compuesta, al igual que en la capitalización simple, se deben tener en cuenta las características comerciales que afectan a cada una de las partes.

Tanto efectivo de coste para el cliente (i_p):

$$E-gN-T=N(1+i_p)^{-\frac{n}{365}}$$

o bien si hay retención:

$$E-gN-T-rN=\left[N-rN\left(1+i_r\frac{n}{360}\right)\right](1+i_p)^{-\frac{n}{365}}$$

En capitalización compuesta se suelen usar 365 días, mientras que en capitalización simple 360. No obstante depende del tipo de operación y del mercado en que se realiza.

El cálculo del T.A.E. exige aplicar la normativa específica que para este tipo de operaciones establece la Circular mencionada. En el descuento de papel comercial el coste efectivo se cumplimentará por cada factura liquidada como sigue:

- Sólo se integrará en el coste el importe de las comisiones que por cada efecto exceda de los mínimos tarifados por cada entidad. Esta circunstancia debe quedar expresamente señalada en la liquidación.

- Los efectos a menos de 15 días no se entenderán descontados a estos fines, considerándose todos sus costes como inherentes al servicio de cobramnza. Serán liquidados separadamente.

La fórmula para calcular el T.A.E. se indica en el anexo V de la Circular. Aplicando la misma operación de descuento anterior, se obtendrá el tanto anual equivalente:

$$E - G' = N(1 + T.A.E.)^{-\frac{n}{360}}$$

donde $G' = gN -$ comisión mínima.

Es decir, que el coste para el cliente que representa el T.A.E. no tiene en cuenta algunos de los gastos que necesariamente ha de soportar. Más bien el T.A.E. representa una aproximación al rendimiento que obtendría la entidad financiera.

6.2.2. Descuento de una remesa de efectos

Es frecuente que el cliente presente para descontar en la entidad financiera un conjunto de efectos de distintos nominales y vencimientos que se denomina remesa de efectos. La entidad financiera puede aplicar igual tipo de descuento, en cuyo caso, el efectivo obtenido será:

$$E = E_1 + E_2 + \ldots + E_n = \sum_{h=1}^{n} N_h \left(1 - d\frac{n_h}{360}\right)$$

siendo:

- N_h = nominal del efecto h.

- n_h = vencimiento del efecto h.

Puede simplificarse esta expresión utilizando el vencimiento medio, es decir:

$$(N_1, n_1), (N_2, n_2), \ldots, (N_n, n_n)$$

pueden ser sustituidos por:

$$N = \sum_{h=1}^{n} N_h \qquad \tau = \frac{\sum_{h=1}^{n} N_h n_h}{\sum_{h=1}^{n} N_h}$$

por tanto:

$$E = N\left(1 - d\frac{\tau}{360}\right)$$

Incluyendo las características comerciales, comisión de negociación y timbre, el efectivo neto será:

$$E' = E - G - T$$

siendo $G = \sum gN_h$ y $T = \sum T_h$.

Cuando todos los efectos tienen el mismo nominal y vencimientos sucesivos, se les denomina **letras persiana**. Suelen proceder de ventas a plazos.

Por otra parte, la entidad financiera puede aplicar un tanto de descuento único que incluye la comisión de negociación y otros gastos con independencia de los plazos de vencimiento, etc. Esta modalidad se conoce como **descuento a forfait**.

El coste para el cliente

Si se calcula en capitalización simple utilizando el vencimiento medio τ:

$$E'\left(1 + i\frac{\tau}{360}\right) = N$$

En capitalización compuesta no puede utilizarse el vencimiento medio y exige la equivalencia financiera entre las cuantías realmente intercambiadas por las partes.

Si se utilizan los criterios de la Circular del Banco de España, el cálculo del T.A.E. exige que la comisión sólo se compute por el exceso sobre el mínimo tarifado, no se tiene en cuenta el timbre ni tampoco la retención si la hubiere ni los efectos a menos de 15 días:

$$E - G' = N_1(1 + T.A.E.)^{-\frac{n_1}{360}} + \ldots + N_n(1 + T.A.E.)^{-\frac{n_n}{360}}$$

Letras de resaca

Se generan a través de efectos impagados o devueltos, que vuelven a girarse teniendo en cuenta no sólo el nominal del primero sino también los costes que ocasiona.

Los costes más destacables son: gastos de devolución, comisión por devolución, intereses de demora, además del timbre de la nueva letra y otros gastos diversos.

6.2.3. Crédito comercial

Es una forma de ofrecer a los consumidores la posibilidad de pagar el precio de la compra en un momento posterior. El precio que figura en la mercancía es el que el comprador deberá pagar en uno o varios plazos. Dicho precio incluye el coste de aplazamiento. Por ello, es frecuente, o bien ofrecer un descuento por pagar al contado, o bien aumentar un porcentaje del precio establecido si se alarga la fecha de pago.

Es una variante del descuento comercial y por tanto exige una relación entre el tanto de descuento (descuento comercial) y el de descuento de pronto pago. Llamando:

- P_n = precio del producto aplazado hasta el momento n.
- P_0 = precio al contado.
- r = descuento por pronto pago.
- d = tanto de descuento simple comercial resultante.
- n = plazo expresado en días.

$$P_0 = P_n(1-r) = P_n\left(1 - d\frac{n}{360}\right) \to d = \frac{360}{n}r$$

6.3. Otras operaciones simples: activos financieros a corto plazo

Las Letras del Tesoro y los pagarés de empresa son los activos financieros a corto plazo más representativos. Ambos presentan el mismo planteamiento financiero: se trata de una operación simple en la que la prestación es el capital que se entrega en el inicio (emisión del activo) y que se corresponde con el precio o efectivo abonado por el suscriptor y la contraprestación es el capital devuelto al vencimiento por el emisor denominado nominal.

Las letras del Tesoro son títulos de Deuda Pública emitidos a plazos no superiores a 18 meses. Se emiten al descuento generalmente a través de subastas competitivas donde se oferta precio y volumen deseado.

Los pagarés de empresa son títulos negociables, al portador, emitidos por las empresas (el tratamiento financiero es similar al de las Letras del Tesoro). El procedimiento habitual para la emisión de los mismos es también por subasta y dentro de un programa de emisiones.

La ley financiera generalmente utilizada es la capitalización simple (aunque para operaciones a más de 376 días el Banco de España utiliza capitalización compuesta en el cálculo de rentabilidades a vencimiento).

Para $n < 376$ días la relación entre el precio de emisión P y nominal o valor de amortización N, viene dada por:

$$P\left(1 + i\frac{n}{360}\right) = N \quad \text{de donde} \quad P = N\left(1 + i\frac{n}{360}\right)^{-1}$$

siendo i el tanto de interés que representa la rentabilidad del activo a vencimiento en la fecha de emisión.

Para $n > 376$ la relación será:

$$P(1+i)^{\frac{n}{360}} = N \quad \text{de donde} \quad P = N(1+i)^{-\frac{n}{360}}$$

HOJA DE EJERCICIOS TEMA 6

1. Sea una operación financiera de prestación 500.000 euros en el momento actual y contraprestación la cuantía equivalente, C, dentro de un año, según la ley de capitalización simple $L(t;p) = 1 + 0,09(p - t)$ con p al final de la operación. Determínese:

    a) La cuantía de la contraprestación.

    b) La reserva matemática transcurridos 8 meses de la operación por los métodos prospectivo y retrospectivo.

2. Un establecimiento comercial concede crédito a sus clientes incrementando el precio de contado con los intereses (pospagables o acumulados) calculados en capitalización simple al $1,5\,\%$ mensual con punto de aplicación al final de la operación, y formalizado en letra de cambio. Si el precio de un vídeo es de 2.000 euros y el comprador quiere aplazar el pago 90 días, determínese la cuantía de la letra a firmar.

    Transcurridos 15 días el vendedor procede a descontar la letra en una entidad bancaria que opera en descuento comercial de parámetro $d = 0,19$ anual y punto de aplicación el momento del descuento. Determínese el valor descontado de la letra. Supuesto que el comprador desee cancelar la deuda a los 15 días de la compra por la reserva matemática en ese momento, estúdiese si le interesa al vendedor.

3. Una entidad financiera desea obtener la misma rentabilidad (medida en tanto de interés simple) del $12\,\%$ anual en las operaciones de descuento comercial, con independencia del vencimiento de las mismas. Determínese qué tanto de descuento anual tendría que aplicar para conseguirla si los plazos fueron 30, 60, 90, 180 y 360 días.

4. La empresa X presenta al descuento 2 efectos comerciales de nominales 1.000 euros y 6.000 euros y vencimientos a 30 y 180 días respectivamente.

    La entidad bancaria le aplicará un tanto de descuento anual del $11\,\%$ para cualquier plazo. Comisión de cobranza del $0,4\,\%$ sobre nominal (mínimo 5 euros) y retención del $10\,\%$ del nominal de cada efecto, la cual se devolverá al vencimiento de los mismos capitalizado a tanto de interés simple anual del $3\,\%$. El importe de los efectos (timbre) asciende a 4 euros y 17 euros respectivamente. Determínese:

    a) Efectivo obtenido por la empresa al descontar cada uno de los efectos.

    b) Coste a que le resulta cada efecto (medido en capitalización simple.

    c) El T.A.E. resultante para cada efecto según la normativa del Banco de España.

5. Un establecimiento comercial acude a una entidad bancaria para descontar 3 efectos comerciales a 30, 90 y 180 días y con nominales 1.000, 3.000 y 6.000 euros respectivamente.

Las condiciones que ofrece el banco son: tanto de descuento anual del 9 %, 10 % y 12 % según plazos. Comisión del 4‰. No obstante el banco le ofrece también la modalidad de descuento a forfait aplicando un único tanto anual del 12 %. Determínese qué modalidad le interesa más al citado establecimiento.

6. Un concesionario de automóviles acude a una entidad bancaria el 15 de febrero a descontar 10 letras de cambio procedentes de una venta a plazos de nominal 800 euros cada una y vencimientos sucesivos los días 15 de cada mes de marzo a diciembre.

   Calcúlese el efectivo que se obtendrá si la entidad aplica un tipo de descuento del 12 % anual y una comisión del 0,4 % sobre el nominal.

7. Cierta persona solicita un préstamo a una entidad financiera instrumentándose en una letra de cambio de nominal 10.000 euros y vencimiento dentro de cuatro meses. Si el tanto de descuento anual aplicado es el 10 %, la comisión bancaria el 5‰ sobre el nominal y el timbre de la letra 34 euros. Determínese:

   a) Efectivo por razón de descuento y cuantía neta del préstamo.
   b) Coste para el prestatario y rendimiento para la entidad financiera medido por el tanto de interés simple.
   c) Igual pero utilizando capitalización compuesta.

8. Un fabricante vende sus productos con crédito comercial a 90 días. Dado que necesita liquidez ofrece un descuento de pronto pago a sus clientes del 5 %. Determínese:

   a) A qué tanto de descuento comercial equivale el descuento que ofrece.
   b) Si en vez de ser a 90 días fuese a plazo de 60 días, qué descuento por pronto pago debería ofrecer el fabricante para que resulte el mismo tanto de descuento anual.
   c) A qué tanto de interés simple equivale el descuento por pronto pago en los casos a) y b).

9. La empresa X efectuó una venta instrumentándose el pago en una letra de cambio de nominal 10.000 euros y vencimiento a 90 días, que procedió a descontar en su banco aplicándole un tanto de descuento del 10 % anual y comisión de cobranza del 0,6 % con mínimo de 6 euros. Llegado el vencimiento de la letra resulta impagada. Determínese:

   a) Efectivo obtenido por la empresa al presentarla al descuento.
   b) Cuantía total que el banco cargará en la cuenta del cliente (empresa X) si aplica una comisión del 2 % y los gastos de protesto ascienden a 15 euros.
   c) Nominal de la letra de resaca que se girará 30 días después del vencimiento de la primera a 60 días de plazo con las mismas condiciones que la primera letra y con cargo de intereses de demora del 8 % anual por los 30 días, tiembre 34 euros.

10. RENFE emite pagarés de empresa a 6 meses con nominal 10.000 euros y rentabilidad en la emisión del $5,25\,\%$ anual.

    Un inversor adquiere pagarés y desea mantenerlos en su poder el tiempo necesario para obtener 9.850 euros por la venta de cada uno y garantizarse una rentabilidad mínima del $6,25\,\%$ anual. Determínese el plazo máximo de tenencia de los pagarés.

Capítulo 7

Operaciones de constitución de capital

7.1. Concepto. Equivalencia financiera y reserva matemática

Se denomina así a toda operación compuesta de prestación múltiple y contraprestación única, donde la finalidad de la prestación es formar o constituir un capital, el de la contraprestación, cuyo vencimiento ha de ser igual o posterior al último de la prestación.

Sea una operación definida por los conjuntos de capitales siguientes:

- Prestación: $\{(a_1, t_0), (a_2, t_1), \ldots, (a_n, t_{n-1})\}$
- Contraprestación: $\{(C_n, t_n)\}$

con t_0 origen de la operación y t_n final de la misma.

Los capitales de la prestación reciben el nombre de términos constitutivos y el vencimiento está situado en el extremo inferior de cada uno de los periodos, por tanto pueden considerarse imposiciones prepagables (de manera similar se puede realizar el estudio de la operación si las imposiciones se consideran pospagables).

El esquema de esta operación está representado en la Figura 7.1.

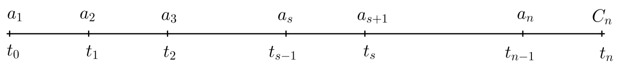

Figura 7.1: Operación de constitución.

Planteada la equivalencia financiera según la ley financiera de capitalización, se tiene:

- En t_n:

$$C_n = \sum_{r=1}^{n} a_r u(t_{r-1}, t_r; p)$$

- En t_0:

$$C_n u^*(t_0, t_n; p) = \sum_{r=1}^{n} a_r u^*(t_0, t_{r-1}; p)$$

Si se conocen los réditos de capitalización para cada periodo $i_1, i_2, \ldots, i_n$ la equivalencia financiera viene formulada de la siguiente forma:

- En t_n:

$$C_n = \sum_{r=1}^{n} a_r \prod_{h=r}^{n} (1 + i_h)$$

- En t_0:

$$C_n \prod_{h=1}^{n} (1 + i_h)^{-1} = a_1 + \sum_{r=2}^{n} a_r \prod_{h=1}^{r-1} (1 + i_h)^{-1}$$

y en el caso particular de que los réditos sean constantes:

- En t_n:

$$C_n = \sum_{r=1}^{n} a_r (1 + i)^{n-(r-1)}$$

- En t_0:

$$C_n (1 + i)^{-n} = \sum_{r=1}^{n} a_r (1 + i)^{-(r-1)}$$

La reserva matemática en un punto intermedio τ tiene el significado de capital constituido hasta ese momento. Calculada por el método retrospectivo es:

$$C_\tau = \sum_{r=1}^{s} a_r u(t_{r-1}, \tau; p) \quad \text{con} \quad t_{s-1} \leq \tau \leq t_s$$

Si τ coincide con el vencimiento de algún término constitutivo (por ejemplo, $\tau = t_s$) hay que distinguir entre el valor de la reserva a la derecha o a la izquierda, dando lugar a:

- C_s^+: capital constituido incluyendo el término (a_{s+1}, t_s).
- C_s^-: capital constituido instantes antes del vencimiento del mismo.

Dado el carácter prepagable de las imposiciones, lo habitual es calcular el saldo por la izquierda, aunque no hay inconveniente para calcularlo por la derecha. La diferencia entre ambos valores es, por tanto, la cuantía del término constitutivo con vencimiento en t_s:

$$C_s^+ = C_s^- + a_{s+1}$$

El capital constituido por la izquierda será:

- Método retrospectivo:

$$C_s^- = \sum_{r=1}^{s} a_r \prod_{h=r}^{s} (1 + i_h)$$

- Método prospectivo:

$$C_s^- = C_n \prod_{h=s+1}^{n} (1+i_h)^{-1} - \left[\sum_{r=s+2}^{n} a_r \prod_{h=s+1}^{r-1} (1+i_h)^{-1} + a_{s+1} \right]$$

  y si los réditos son constantes:

$$C_s^- = \sum_{r=1}^{s} a_r (1+i)^{s-(r-1)} = C_n (1+i)^{-(n-s)} - \sum_{r=s+1}^{n} a_r (1+i)^{s-(r-1)}$$

- Método recurrente:

$$C_s^- = (C_{s-1}^- + a_s)(1+i_s)$$

  Ecuación que recoge la evolución de la operación y se denomina **ecuación dinámica de la constitución**. Operando se llega a:

$$C_s^- - C_{s-1}^- = a_s + (C_{s-1}^- + a_s) i_s = a_s + I_s$$

  donde $\Delta_s^- = C_s^- - C_{s-1}^-$ se denomina **cuota de constitución** y expresa el incremento del capital constituido en el periodo $[t_{s-1}, t_s)$. La cantidad $I_s = (C_{s-1}^- + a_s) i_s$ es la cuota de interés y expresa los intereses generados por el capital $(C_{s-1}^- + a_s)$ en el intervalo $[t_{s-1}, t_s)$.

  Es decir, que la cuota de constitución o incremento del capital constituido a cada periodo Δ_s^- se compone de dos sumandos: la cuantía del término constitutivo a_s asociado a dicho periodo, y la cuantía de los intereses que se generan en el mismo I_s.

De la definición de cuota de constitución se deducen las relaciones siguientes:

$$C_s^- = C_{s-1}^- + \Delta_s^- \quad ; \quad C_s^- = \sum_{h=1}^{s} \Delta_h^- \quad ; \quad C_n = \sum_{h=1}^{n} \Delta_h^-$$

Puede definirse otra magnitud K_s como capital pendiente de constituir en el punto t_s y viene expresado por la diferencia $K_s = C_n - C_s^-$.

Todos los valores de las variables que intervienen en la operación se pueden recoger en el denominado cuadro de constitución que permite seguir la evolución de la operación periodo a periodo.

La operación de constitución de un capital se realiza para alcanzar un fin determinado, son operaciones de ahorro finalista, ya sea de un objetivo concreto, por ejemplo, un bien económico, o se trate de canalizar parte de las rentas actuales a un futuro ligado con el periodo de vida laboral, por ejemplo, planes de jubilación. En este último caso es corriente que el capital constituido en vez de recibirse de una sola vez, se sustituya por una renta temporal o vitalicia.

HOJA DE EJERCICIOS TEMA 7

1. Un individuo desea construir un capital de 8.000 euros en 4 años, para lo cual irá realizando imposiciones al principio de cada año de cuantías: 1.500 euros, 1.800 euros, 2.000 euros y x euros en una entidad financiera que valora en capitalización compuesta al 8 % anual. Determínese:

   a) Cuantía de la última imposición.

   b) Evolución del capital constituido y cuotas de constitución de cada uno de los cuatro años.

2. Para constituir un capital de 2.000.000 euros en 6 años, se colocará a comienzo de cada año la cuantía constante necesaria en una entidad financiera que capitaliza a rédito constante anual $i = 0,09$. Determínese:

   a) Cuantía constante del término constitutivo.

   b) Capital constituido por la derecha y por la izquierda después de 3 años.

   c) Qué valor tomarían los términos constitutivos si la operación se realizará con cutoas de contitución constantes (por la izquierda).

3. Con objeto de constituir un capital se han realizado imposiciones anuales de 10.000 euros al principio de cada año. Si la operación se concierta al 6 % anual durante los 3 primeros años y al 8 % anual para los 3 restantes. Determínese:

   a) Capital constituido al finalizar el sexto año.

   b) Cuotas de constitución y de interés de los periodos segundo y quinto.

4. Teniendo como objetivo la constitución de un capital, la empresa X realiza una primera imposición de 200.000 euros que irá incrementándose en años sucesivos a razón de 50.000 euros por años en una entidad financiera que capitaliza al 10 % constante anual. Construir el cuadro de constitución, supuesto que se realicen un total de 5 ingresos.

5. Determínese las variables correspondientes al quinto y sexto año del cuadro de constitución de un capital de cuantía un millón de euros mediante 10 imposiciones anuales variables en progresión geométrica de razón $q = 0{,}9$, siendo el rédito anual de valoración $i = 0{,}08$.

6. Se desea constituir un capital de 600.000 euros disponible el 31-12-2013, mediante imposiciones semestrales constantes, realizando la primera el 1-7-2003. Si la operación se concierta con una entidad financiera que capitaliza a rédito constante anual del 7 %, determínese:

   a) Cuantía de las imposiciones semestrales.

b) Capital constituido el 1-10-2008.

c) Capital pendiente de constituir a 30-6-2009.

7. Se ingresa al principio de cada semestre en una entidad bancaria un capital de cuantía a durante 5 años, siendo el tanto nominal anual aplicable para periodos semestrales el 6 %. Determínese:

   a) Capital constituido al cabo de 7 años.

   b) Incremento del capital constituido durante el tercer año.

   c) Si transcurridos 4 años el tanto disminuye al 4 %. Cuál sería la cantidad semestral a ingresar durante los 3 años restantes para que el capital constituido fuera el mismo que en el caso anterior?

8. Cierta persona tiene contratado un plan de ahorro de diez años de duración con una entidad financiera que valora a tanto nominal del 5 % por el que se comprometió a ingresar 300 euros al principio de cada mes. En este momento, cuando han transcurrido 4 años desde el inicio de la operación, se le plantea la posibilidad de contratar dicho plan con otra entidad que valora al rédito mensual del 0,5 %. Teniendo en cuenta que existe una comisión de cancelación del 4 % sobre el capital constituido y unos gastos de tramitación de 400 euros, estúdiese la conveniencia o no de llevar a cabo la cancelación trasladando el capital recuperado a la otra entidad, y en caso afirmativo, calcúlese el tanto efectivo al que resultaría toda la operación.

Capítulo 8

Operaciones de amortización o préstamos

8.1. Concepto. Equivalencia financiera y reserva matemática

Se denomina operación de amortización a toda operación financiera de prestación única y contraprestación múltiple:

- (C_0, t_0) representa al único capital de la prestación.
- $(a_1, t_1), (a_2, t_2), \ldots, (a_n, t_n)$ a los capitales que forman la contraprestación, que reciben el nombre de términos amortizados y cuya finalidad es la devolución del capital prestado (C_0, t_0) junto con los intereses devengados.

Gráficamente la operación se representa en la Figura 8.1.

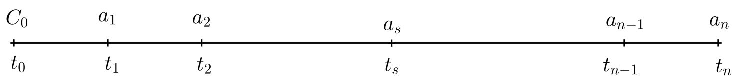

Figura 8.1: Operación de amortización.

Las operaciones de amortización pueden concertarse con cualquier ley financiera, aunque lo más habitual es hacerlo en base a la capitalización compuesta.

Las ecuaciones de equivalencia financiera se pueden establecer en el origen de la operación t_0 o en el final t_n:

- En t_0:

$$C_0 = \sum_{r=1}^{n} a_r u^*(t_0, t_r; p)$$

- En t_n:

$$C_0 u(t_0, t_n; p) = \sum_{r=1}^{n} a_r u(t_r, t_n; p)$$

Si se conocen los réditos periodales de capitalización para cada periodo $i_1, i_2, \ldots, i_n$ la equivalencia financiera viene formulada de la siguiente forma:

- En t_0:

$$C_0 = \sum_{r=1}^{n} a_r \prod_{h=1}^{r} (1 + i_h)^{-1}$$

- En t_n:

$$C_0 \prod_{h=1}^{n} (1 + i_h) = \sum_{r=1}^{n-1} a_r \prod_{h=r+1}^{n} (1 + i_h) + a_n$$

y en el caso particular de que los réditos sean constantes:

- En t_0:

$$C_0 = \sum_{r=1}^{n} a_r (1 + i)^{-r}$$

- En t_n:

$$C_0 (1 + i)^n = \sum_{r=1}^{n} a_r (1 + i)^{n-r}$$

La reserva matemática o saldo financiero de la operación de amortización en un punto intermedio τ tiene el significado de deuda pendiente o capital vivo, y se representa por C_τ. Para $t_{s-1} < \tau < t_s$, será:

- Método retrospectivo:

$$C_\tau = C_0 u(t_0, \tau; p) - \sum_{r=1}^{s-1} a_r u(t_r, \tau; p)$$

- Método prospectivo:

$$C_\tau = \sum_{r=s}^{n} a_r u^*(\tau, t_r; p)$$

Si τ coincide con el vencimiento de algún capital es preciso distinguir entre la reserva a la derecha C_s^+ y la reserva a la izquierda C_s^-. En el primer caso se considera como abonado el término (a_s, t_s) y en el segundo se supone que dicho término está pendiente de abonar, siendo la diferencia entre ambos valores la cuantía del término amortizativo (a_s, t_s):

$$C_s^- = C_s^+ + a_s$$

Habitualmente calculamos la reserva matemática por la derecha:

- Método prospectivo:

$$C_s^+ = C_s = \sum_{r=s+1}^{n} a_r u^*(t_s, t_r; p) = \sum_{r=s+1}^{n} a_r \prod_{h=s+1}^{r} (1+i_h)^{-}1 = \sum_{r=s+1}^{n} a_r (1+i)^{-(r-s)}$$

- Método retrospectivo:

$$C_s^+ = C_s = C_0 u(t_0, t_s; p) - \sum_{r=1}^{s} a_r u(t_r, t_s; p) =$$

$$= C_0 \prod_{h=1}^{s} (1+i_h) - \sum_{r=1}^{s-1} a_r \prod_{h=r+1}^{s} (1+i_h) - a_s = C_0 (1+i)^s - \sum_{r=1}^{s} a_r (1+i)^{s-r}$$

  La condición de cierre de la operación es que al final hayamos amortizado toda la deuda, con lo cual $C_n^+ = 0$.

- Método recurrente: Permite analizar la evolución del capital vivo entre dos periodos, a través de la denominada ecuación dinámica:

$$C_s = C_{s-1}(1+i_s) - a_s$$

  operando se llega a:

$$a_s = C_{s-1} - C_s + C_{s-1} i_s = A_s + I_s$$

  donde $A_s = C_{s-1} - C_s$ representa la disminución de la deuda pendiente en el periodo $(t_{s-1}, t_s]$ y recibe el nombre de cuota de amortización del periodo. $I_s = C_{s-1} i_s$ representa los intereses generados en el periodo $(t_{s-1}, t_s]$ por el capital vivo al principio del mismo.

La cuantía del término amortizativo se descompone en cuota de interés y cuota de amortización. Conviene resaltar que dicha cuantía se destina en primer lugar al pago de los intereses devengados y una vez cubiertos, el resto si es positivo atiende a disminuir la deuda pendiente.

Definida la cuota de amortización como diferencia del capital vivo en dos periodos consecutivos, son inmediatas las relaciones:

$$C_0 = \sum_{h=1}^{n} A_h \quad ; \quad C_s = \sum_{h=s+1}^{n} A_h$$

Es posible definir otra variable M_s que representa la cuantía del capital amortizado hasta t_s, de tal forma que:

$$M_s = \sum_{h=1}^{s} A_h = C_0 - C_s$$

Resulta útil recoger el proceso de amortización de un capital en un cuadro que refleja de forma clara el valor que toman las principales variables en los distintos vencimientos de la operación.

8.2. Métodos de amortización

8.2.1. Amortización americana

Consiste en abonar únicamente los intereses devengados en cada periodo, al final del mismo, dejando la amortización principal del préstamo C_0 para el final de la operación.

El método americano implica el cumplimiento de las siguientes relaciones equivalentes:

$$\begin{cases} a_1 = I_1 = C_0 i_1; a_2 = I_2 = C_0 i_2; \cdots; a_n = I_n + a_n = C_0 i_n + C_0 \\ A_1 = 0; A_2 = 0; \cdots; A_{n-1} = 0; A_1 = C_0 \\ C_0 = C_1 = C_2 = \cdots = C_{n-1}; C_n = 0 \end{cases}$$

8.2.2. Método progresivo o francés

Recibe esta denominación el caso particular de amortización de un capital (C_0, t_0) mediante términos amortizativos constantes y réditos periodales de valoración constantes, es decir:

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_n = a$$

$$i_1 = i_2 = \cdots = i_n = i$$

La equivalencia financiera viene dada por:

- En el origen t_0:

$$C_0 = a \cdot a_{\overline{n}|i} \rightarrow a = \frac{C_0}{a_{\overline{n}|i}}$$

- En el final t_n:

$$C_0(1+i)^n = a \cdot s_{\overline{n}|i}$$

La reserva matemática o capital vivo a la derecha de t_s (comienzo del periodo $s+1$) será:

- Método prospectivo:

$$C_s = a \cdot a_{\overline{n-s}|i}$$

- Método retrospectivo:

$$C_s = C_0(1+i)^s - a \cdot s_{\overline{s}|i}$$

- Método recurrente:

$$C_s = C_{s-1}(1+i) - a$$

Planteando esta ecuación para dos periodos consecutivos y restando miembro a miembro, se obtiene una relación entre las cuotas de amortización que varían en progresión geométrica de razón $(1+i)$:

$$A_{s+1} = A_s(1+i) = A_1(1+i)^s$$

como $a_1 = a = C_0 i + A_1 \rightarrow A_1 = a - C_0 i > 0$.

Este método de amortización se utiliza mucho en la práctica debido a su sencillez, con sólo calcular la cuantía constante de los términos amortizativos podemos obtener de forma inmediata el resto de las magnitudes.

8.2.3. Método de cuotas de amortización constantes

Este método supone que la cuantía destinada a la devolución del capital prestado es constante para todos los periodos, es decir:

$$A_1 = A_2 = \cdots = A_n = A$$

y teniendo en cuenta que $C_0 = \sum_{h=1}^{n} A_h = n \cdot A$, se tiene que $A = \frac{C_0}{n}$.

En consecuencia, el capital vivo será:

$$C_s = \sum_{h=s+1}^{n} A_h = (n-s)A = C_{s-1} - A$$

el capital amortizado:

$$M_s = \sum_{h=1}^{s} A_h = sA = M_{s-1} + A$$

y los términos amostizativos:

$$a_s = I_s + A = C_{s-1} \cdot i_s + A.$$

En el caso particular de réditos periodales constantes $i_s = i \; \forall s = 1, 2, \cdots, n$, los intereses que son proporcionales al capital vivo, decrecerán en progresión aritmética de razón $-A \cdot i$:

$$I_{s+1} = C_s \cdot i = (C_{s-1} - A)i = C_{s-1} \cdot i - Ai = I_s - Ai$$

y los términos amortizativos varían con la misma ley, dado que $a_s = A + I_s$:

$$a_{s+1} = a_s - Ai \rightarrow a_1 - s \cdot Ai$$

con $a_1 = C_0 i + A$.

8.2.4. Amortización con términos con términos variables en progresión geométrica y aritmética

La amortización del capital (C_0, t_0) se realiza mediante n términos amortizativos:

$$(a, t_1), (aq, t_2), \ldots, (aq^{n-1}, t_n)$$

que son variables en progresión geométrica de razón $q > 0$ y con rédito periodal de valoración constante i.

Debe verificarse la equivalencia financiera:

$$C_0 = \sum_{s=1}^{n} aq^{s-1}(1+i)^{-s} = A_{(a,q)\overline{n}|i} = a\frac{1 - q^n(1+i)^{-n}}{1+i-q}$$

supuesto conocidos los valores de C_0 y q se obtiene el primer término y siguientes:

$$a = \frac{C_0(1+i-q)}{1 - q^n(1+i)^{-n}} > 0$$

De la misma forma el capital vivo transcurridos s periodos vendrá dado por:

$$C_s = A_{(aq^s,q)\overline{n-s}|i} = aq^s\frac{1 - q^{n-s}(1+i)^{-(n-s)}}{1+i-q}$$

o bien por recurrencia:

$$C_s = C_{s-1}(1+i) - aq^{s-1}$$

De manera similar puede plantearse la amortización de préstamos con términos variables en progresión aritmética de razón d. En este caso, los términos son:

$$(a, t_1), (a+d, t_2), \ldots, (a+(n-1)d, t_n).$$

La razón d puede ser positiva o negativa, pero en este último caso se exige que el último término sea positivo. Si $d < 0$:

$$a_n = a + (n-1)d > 0$$

Planteada la equivalencia en el origen debe cumplirse:

$$C_0 = \sum_{s=1}^{n}[a + (s-1)d](1+i)^{-s} = A_{(a,d)\overline{n}|i} = \left(a + \frac{d}{i}\right) a_{\overline{n}|i} - \frac{nd(1+i)^{-n}}{i}$$

8.2.5. Operaciones de amortización con intereses prepagables. Método alemán

Se trata de operaciones en las que el pago de los intereses de cada periodo se realiza por anticipado, es decir, al principio del mismo. Se utiliza para su cálculo el rédito de contracapitalización i_s^* de la ley de capitalización compuesta pactada en la operación, cuya relación con el rédito de capitalización i_s equivalente es la siguiente:

$$(1 + i_s) = (1 - i_s^*)^{-1} \to i_s = \frac{i_s^*}{1 - i_s^*} \to i_s^* = \frac{i_s}{1 + i_s}$$

Estas operaciones incorporan una terminología específica para designar las variables básicas y poder establecer relaciones con las correspondientes variables en el caso de intereses vencidos o pospagables.

Se denomina capital vivo nominal en t_s al capital (C_s^*, t_s) cuya cuantía es igual al valor de la reserva matemática a la izquierda de t_{s+1}, es decir, en el extremo superior del intervalo $[t_s, t_{s+1})$:

$$C_s^* = C_s(1 + i_{s+1}) = C_s(1 - i_{s+1}^*)^{-1}$$

$$C_s = C_s^*(1 - i_{s+1}^*) = C_s^* - C_s^* i_{s+1}^*$$

El capital vivo nominal C_s^* es aquel capital del que deducidos los intereses anticipados del periodo siguiente, se obtiene C_s denominado, en este caso, capital vivo neto o líquido.

En particular, para $t_s = t_0$ resulta:

$$C_0 = C_0^*(1 - i_1^*) = C_0^* - C_0^* i_1^*$$

recibiendo (C_0^*, t_0) el nombre de capital nominal prestado o prestación nominal, y es el capital que al deducir los intereses anticipados del primer periodo, se obtiene (C_0, t_0) capital neto o líquido prestado.

Para $t_s = t_n$:

$$C_n^* = C_n(1 + i_{n+1}) = 0, \text{por ser } C_n = 0$$

Para $t_s = t_{n-1}$:

$$C_{n-1}^* = C_{n-1}(1 + i_n) = C_n + a_n = a_n$$

Planteando la equivalencia financiera se tiene:

$$C_0 = C_0^*(1 - i_1^*) = \sum_{r=1}^{n} a_r \prod_{h=1}^{r} (1 - i_h^*)$$

que puede escribirse:

$$C_0^* = C_0^* i_1^* + \sum_{r=1}^{n} a_r \prod_{h=1}^{r} (1 - i_h^*)$$

y expresa la amortización del capital nominal (C_0^*, t_0) con los términos amortizativos:

$$(a_1, t_1), (a_2, t_2), \ldots, (a_n, t_n)$$

más un término adicional en t_0 de cuantía $C_0^* i_1^*$ en concepto de intereses prepagables del primer periodo.

La reserva matemática o capital nominal vivo (C_s^*, t_s) por el método prospectivo vendrá igualmente dado por:

$$C_s^* = C_s^* i_{s+1}^* + \sum_{r=s+1}^{n} a_r \prod_{h=s+1}^{r} (1 - i_h^*)$$

El saldo por el método recurrente puede deducirse de la ecuación de recurrencia del capital neto:

$$C_s = C_{s-1}(1 + i_s) - a_s$$

$$C_s^*(1 - i_{s+1}^*) = C_{s-1}^*(1 - i_s^*)(1 - i_s^*)^{-1} - a_s$$

de donde resulta:

$$C_{s-1}^* = C_s^*(1 - i_{s+1}^*) + a_s$$

de forma que el término amortizativo a_s se descompone en:

$$a_s = C_{s-1}^* - C_s^* + C_s^* i_{s+1}^* = A_s^* + I_{s+1}^*$$

siendo:

$$A_s^* \rightarrow \text{cuota de amortización nominal del periodo } (t_{s-1}, t_s]$$

$$I_{s+1}^* \rightarrow \text{cuota de interés anticipada del periodo } [t_s, t_{s+1})$$

Al ser $C_n^* = 0$, el último término amortizativo se destina únicamente a amortizar $a_n = A_n^*$, ya que los intereses se abonaron anticipadamente:

$$C_0^* = \sum_{h=1}^{n} A_h^* \text{ y } C_s^* = \sum_{h=s+1}^{n} A_h^*$$

Método alemán

Se denomina así a la operación de amortización con intereses prepagables mediante términos amortizativos constantes $a_s = a, \forall s$ y réditos de contracapitalización constantes para todos los periodos $i_s^* = i^*, \forall s$.

Al ser el rédito de contracapitalización constante i^* también lo será el de capitalización equivalente $i = \frac{i^*}{1-i^*}$ por lo que este método alemán coincide con el método francés a rédito i, si bien en el primer caso se utilizan las variables nominales y en el segundo caso las netas, además de variar la composición de los términos amortizativos.

La ecuación de equivalencia en el origen vendrá dada por:

$$C_0^* = C_0^* i^* + \sum_{r=1}^{n} a(1-i^*)^r$$

$$C_0^* = a\sum_{r=1}^{n}(1-i^*)^{r-1} = a\frac{1-(1-i^*)^n}{i^*}$$

sustituyendo i^* en función de i:

$$C_0^* = a\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}(1+i) = a \cdot \ddot{a}_{\overline{n}|i}$$

y como

$$C_0^* = C_0(1-i^*)^{-1} = C_0(1+i)$$

resulta

$$C_0(1+i) = a \cdot a_{\overline{n}|i}(1+i) \rightarrow C_0 = a \cdot a_{\overline{n}|i}$$

análoga a la del método francés.

La cuantía del capital vivo nominal C_s^* al principio del periodo $s+1$ será:

$$C_s^* = C_{s+1}^- = a\sum_{r=s+1}^{n}(1-i^*)^{r-(s+1)} = a\frac{1-(1-i^*)^{n-s}}{i^*}$$

y análogamente en función de i:

$$C_s^* = a \cdot \ddot{a}_{\overline{n}|i}$$

$$C_s = C_s^*(1+i)^{-1} = a \cdot a_{\overline{n-s}|i}$$

La ecuación dinámica o de recurrencia permite escribir:

$$C_{s-1}^* = C_s^*(1-i^*) + a$$

$$C_s^* = C_{s+1}^*(1-i^*) + a$$

de donde, restando miembro a miembro, se obtiene:

$$A_s^* = A_{s+1}^*(1-i^*) = A_n^*(1-i^*)^{n-s} = a(1-i^*)^{n-s}$$

Es decir, las cuotas de amortización nominales crecen en progresión geométrica de razón:

$$(1-i^*)^{-1} = (1+i)$$

análogo a los resultados obtenidos en el método francés, y la relación entre ambos viene dada por:

$$A_s = C_{s-1} - C_s = C^*_{s-1}(1 - i^*) - C^*_s(1 - i^*) = A^*_s(1 - i^*)$$

o lo que es lo mismo:

$$A^*_s = A_s(1 + i) = A_{s+1}$$

por lo que pueden aplicarse las fórmulas de este método y determinar las variables nominales a través de las relaciones que guardan con las variables netas.

8.2.6. Operaciones de amortización indiciadas en la cuota de interés

Son aquellas en las que las cuantías de la cuota de interés no puede determinarse al concertar la operación, ya que dependen de la evolución de un índice de referencia, normalmente un tipo de interés.

Atendiendo a la periodicidad en la aplicación del índice de referencia se pueden presentar dos modalidades:

a) Con periodos de interés prefijados: En el momento de la contratación se especifica la duración de los periodos en los que el tipo de interés aplicable permanecerá fijo, modificándose al final de cada periodo según la evolución del índice de referencia.

b) Sin periodos de interés prefijados: Cuando el rédito aplicable a la operación varía cada vez que lo hace el índice de referencia. Se les denomina operaciones a tipo de interés flotante.

La modalidad más frecuente es la primera, es decir, operaciones con periodos de interés fijados a priori, en las que en el momento de la contratación no sólo se fija la amplitud del periodo en el que pueden modificarse los réditos, sino también se fija el rédito aplicable al primer periodo. Comúnmente se les conoce como préstamos a interés variable.

El rédito o tipo de interés aplicable al préstamo, resulta de añadir al índice o tipo de referencia un diferencial o margen que se fija al inicio de la operación. En consecuencia, el rédito periodal aplicable i_s se compone de una parte variable i_{rs} que es el índice de referencia del periodo, y una parte fija d que es el diferencial:

$$i_s = i_{rs} \pm d$$

La resolución de estas operaciones depende de cómo se definan los términos amortizativos:

- Si la cuantía de los términos amortizativos es predeterminada (ya sea fija o variable), la duración del préstamo resultará variable: acortándose respecto a la inicialmente prevista, si la evolución del índice de referencia es decreciente, y alargándose en caso contrario.

- Si se establece un plan de amortización fijando las cuotas de amortización periódicas, la duración del préstamo será la establecida a priori, y los términos amortizativos resultarán variables.

- Otra modalidad consiste en calcular los términos amortizativos para toda la operación en base al rédito aplicable al primer periodo. Transcurrido éste, y con la deuda pendiente, vuelven a calcularse los términos amortizativos según el nuevo rédito y para la duración pendiente. Este procedimiento iterativo mantiene fija la duración inicialmente prevista para el préstamo.

8.2.7. Valor financiero del préstamo. Usufructo y nuda propiedad

En una operación de amortización de prestación (C_0, t_0) y contraprestación de términos:

$$(a_1, t_1), (a_2, t_2), \ldots, (a_n, t_n)$$

equivalentes de acuerdo con una ley financiera (que llamaremos ley interna), cuyos réditos periodales son:

$$i_1, i_2, \ldots, i_n$$

la reserva matemática o capital vivo transcurridos s periodos vendrá dada por:

$$C_s = \sum_{r=s+1}^{n} a_r \prod_{h=s+1}^{r} (1 + i_h)^{-1}$$

La posibilidad de transferir el préstamo a terceros o cancelar anticipadamente la operación planteará valorar los derechos y obligaciones pendientes en condiciones de mercado.

Supongamos que la ley financiera $L'(t;p)$ cuyos réditos son $i'_{s+1}, i'_{s+2}, \ldots, i'_n$ recoge esas nuevas condiciones para operaciones análogas.

De acuerdo con ella puede definirse el valor financiero del préstamo en un momento t_s como el valor actualizado de los términos amortizativos pendientes valorados con la ley $L'(t;p)$ o ley externa:

$$V_s = \sum_{r=s+1}^{n} a_r \prod_{h=s+1}^{r} (1 + i'_h)^{-1}$$

V_s representa la cuantía que ofrecería el prestatario por cancelar sus obligaciones o la que demandará el prestamista a cambio de sus derechos.

La descomposición del término amortizativo en sus dos componentes, cuota de interés y cuota de amortización, permite diferenciar en el valor del préstamo el **usufructo** y la **nuda propiedad**:

$$V_s = U_s + N_s$$

U_s es el valor financiero del usufructo que representa en t_s el valor actualizado con la ley externa de las cuotas de interés pendientes:

$$U_s = \sum_{r=s+1}^{n} C_{r-1} i_r \prod_{h=s+1}^{r} (1+i'_h)^{-1}$$

N_s es el valor financiero de la nuda propiedad que representa en t_s el valor actualizado con la ley externa de las cuotas de amortización futuras:

$$N_s = \sum_{r=s+1}^{n} A_r \prod_{h=s+1}^{r} (1+i'_h)^{-1}$$

En el caso particular de réditos constantes tanto para la ley interna como para la externa, es decir:

$$i_{s+1} = i_{s+2} = \ldots = i_n = i$$

$$i'_{s+1} = i'_{s+2} = \ldots = i'_n = i'$$

las ecuaciones de la reserva matemática, valor financiero del préstamo, usufructo y nuda propiedad serían las siguientes:

$$C_s = \sum_{r=s+1}^{n} a_r (1+i)^{-(r-s)}$$

$$V_s = \sum_{r=s+1}^{n} a_r (1+i')^{-(r-s)}$$

$$U_s = \sum_{r=s+1}^{n} C_{r-1} i (1+i')^{-(r-s)}$$

$$N_s = \sum_{r=s+1}^{n} A_r (1+i')^{-(r-s)}$$

En estas condiciones, el valor del usufructo es función de la nuda propiedad a través de la siguiente expresión, llamada fórmula de Achard:

$$U_s = \frac{i}{i'}[C_s - N_s]$$

que junto con:

$$V_s = U_s + N_s$$

constituyen un sistema lineal básico que permite obtener de forma sencilla dos de las variables, conocidas las otras dos, para los distintos casos particulares.

HOJA DE EJERCICIOS TEMA 8

1. Sea una operación de préstamo definido por:

   - Prestación: (C_0, t_0).
   - Contraprestación: (300.000,t_1), (400.000,t_2), (546.560,t_3)

   siendo los réditos de valoración $i_1 = 0,10$,$i_2 = 0,11$ e $i_3 = 0,12$ asociados a los intervalos (t_0, t_1), (t_1, t_2) y (t_2, t_3), respectivamente. Determínese la cuantía de la prestación y los componentes del segundo año en el cuadro de amortización.

2. Cierta persona solicita un préstamo de 50.000 euros a amortizar mediante un único pago al cabo de tres años, siendo el rédito constante anual del $8,25\,\%$. Con objeto de disponer del capital de la contraprestación, el deudor irá depositando la cuantía constante necesaria al final de cada semestre en una entidad que capitaliza al $2,5\,\%$ semestral. Determínese:

   a) Cuantía de las imposiciones semestrales.
   b) Términos semestrales constantes que aplicados directamente al préstamo amortizarían éste en los mismos tres años y al $8,25\,\%$ de interés. Comente los resultados.

3. Cierta persona solicita un préstamo de cuantía 50.000 euros a amortizar en 6 años mediante anualidades constantes. Si el tipo de interés concertado en la operación es el $6\,\%$ anual, determínese:

   a) Cuantía de la anualidad constante.
   b) Capital vivo transcurridos cuatro años.
   c) Cuota de interés y de amortización del periodo cuarto.
   d) Capital total amortizado al comienzo del año tercero.
   e) Indicar cómo se formaría el cuadro de amortización de este préstamo.

4. Se concierta una operación de amortización con las siguientes características:

   - Capital prestado: 100.000 euros.
   - Duración: 8 años.
   - Rédito de valoración constante anual: $6\,\%$.
   - Durante los dos primeros años no se entrega ninguna cantidad en concepto de contraprestación y en los seis restantes las cuotas de amortización serán constantes.

   Constrúyase el cuadro de amortización.

5. Un préstamo de 80.000 euros ha de amortizarse en 10 años, con abono de intereses anuales al 8 % los 6 primeros años y al 9 % los 4 restantes. Si durante los dos primeros años sólo se abonan las cuotas de interés y en los restantes el término amortizativo es constante, calcúlese:

   a) Cuantía de los términos amortizativos.
   b) Capital vivo al comienzo de los años tercero y quinto.
   c) Cuotas de amortización de cada uno de los periodos.

6. Cierta empresa concierta una operación de amortización con las siguientes características:

   - Cuantía del préstamo: 300.000 euros.
   - Duración de la operación: 3 años.
   - Tanto efectivo de valoración: 7 % anual.

   La amortización se realizará mediante pagos trimestrales constantes de 15.000 euros incrementándose el último pago en la cuantía necesaria para saldar la operación. Con objeto de tener disponible dicha cuantía al cabo de 3 años, el prestatario realizará imposiciones trimestrales de cuantía constante en una entidad que le abona intereses trimestrales del $1,5\,\%$. Determínese:

   a) Las cuantías de las imposiciones.
   b) La reserva matemática en el conjunto de las dos operaciones transcurridos 15 meses.
   c) Si el rédito de valoración en la operación de constitución fuese también del 7 % efectivo anual, determínese el nuevo valor de la reserva o deuda pendiente y analícese la operación conjunta.

7. Constrúyase el cuadro de amortización de un préstamo con las siguientes características:

   - C_0=20.000 euros.
   - Duración: 5 años.
   - Abono de intereses a rédito anual $i_1 = 0,05$ los tres primeros años e $i_2 = 0,06$ los restantes.
   - La amortización se realiza mediante términos amortizativos variables en progresión geométrica de razón $q = 1,05$ abonándose el primero a los dos años de concertada la operación, ya que en el primer año sólo se abonarán intereses.

8. El señor X tiene concedido un préstamo con las siguientes características:

- Nominal:500.000 euros.
- Duración: 8 años.
- Rédito anual 7 %.
- Amortización mediante 4 pagos bienales crecientes en progresión aritmética de razón 10.000 euros.

Calcúlese:

a) La cuantía de dichos pagos.

b) Si transcurridos 5 años, el señor X decide cancelar el préstamo y transformar la deuda pendiente (capital vivo en ese momento más el 2 % de esa cantidad en concepto de gastos de rescisión) en otro préstamo a amortizar mediante tres cuotas bienales constantes, abonándose la primera transcurrido un año desde el cambio de la operación, determínese la cuantía de los nuevos términos amortizativos, sabiendo que los intereses se abonan anualmente a rédito constante anual del $7,5\,\%$.

9. Dado un préstamo a amortizar en 4 años con abono de intereses pospagables y las siguientes características:

   - Cuotas de amortización: A_1=200.000, A_2=150.000, A_3=175.000, A_4=175.000.
   - Réditos anuales pospagables: $i_1 = 0,08$, $i_2 = 0,09$, $i_3 = 0,07$, $i_4 = 0,09$.

   Determínese:

   a) Términos amortizativos, capitales vivos y cuotas de interés para cada uno de los años.

   b) Nuevas variables que surgirían al interpretar esta operación con pago de intereses anticipados.

10. Dado un préstamo de cuantía nominal $C_0^* = 5 \cdot 10^6$ euros para ser amortizado por el método alemán en 5 años y valorado a rédito anticipado $i^* = 0,10$. Determínese:

    a) Anualidad constante que amortiza el préstamo.

    b) Capital vivo nominal y capital vivo neto transcurridos tres años.

    c) Descomposición del cuarto término amortizativo en cuota de amortización nominal e intereses prepagables, y cuota de amortización neta e intereses pospagables.

Capítulo 9

Introducción al estudio de los empréstitos

9.1. Planteamiento general

Los empréstitos son operaciones de amortización que se definen como un conjunto de préstamos homogéneos donde cada uno pierde su individualidad ya que a todos los efectos son iguales a priori y, por tanto, intercambiables.

El capital prestado de un empréstito se divide en un número muy elevado de préstamos cuya amortización se establece a través de un plan general y único. Las partes alícuotas en las que se divide el empréstito se representan por títulos-valores susceptibles de negociación en los mercados de valores y reciben la denominación genérica de obligaciones (pueden tomar otras como bonos, cédulas, etc.).

El prestatario de la operación, que es el emisor del empréstito, es único y es el que fija las condiciones de emisión (tipo de interés, valor de la emisión, plan de cancelación, características comerciales, etc.).

Los prestamistas son múltiples y reciben el nombre genérico de obligacionistas al suscribir las obligaciones.

La prestación total del empréstito es $C_0^T = C \cdot N_1$, donde C es el valor nominal de cada obligación y N_1 es el número de obligaciones emitidas, es decir, cada uno de los préstamos componentes.

La característica esencial de los empréstitos frente a las operaciones de amortización estudiadas en el capítulo anterior es precisamente esa doble perspectiva:

a) Desde el punto de vista del emisor es una operación única.

b) Desde el punto de vista de los obligacionistas son préstamos individuales de cualquier modalidad pero con condiciones financieras equivalentes.

9.1.1. Clasificación

Los empréstitos pueden clasificarse desde muy diversos puntos de vista y abarcan una casuística muy variada.

a) Según el programa de cancelación:

- Empréstitos sin cancelación escalonada o con un solo momento de reembolso total de los títulos. El número de obligaciones permanece constante a lo largo de la vida del empréstito.
- Empréstitos con cancelación escalonada, en los que el número de obligaciones en circulación va disminuyendo a lo largo de la duración del empréstito. El método habitual de determinar los títulos a cancelar en cada periodo es el sorteo.
- Empréstitos sin compromiso de cancelación (perpetuos).

b) Por la modalidad de amortización de los préstamos u obligaciones:

- Obligaciones americanas. Se abonan cupones periódicos (intereses) durante toda la vida de las mismas hasta su amortización a vencimiento.
- Obligaciones simples o con intereses acumulados. Las obligaciones no reciben ninguna cantidad periódica en concepto de intereses (cupón cero), recibiendo éstos, junto con el valor nominal, en el momento de su amortización.
- Obligaciones amortizables por reducción de nominal en donde se produce una amortización parcial de la deuda a lo largo de la vida de los títulos.

c) Por la modalidad del préstamos que constituye el empréstito globalmente considerado (americano, francés, cuotas constantes, etc.).

d) Por la existencia de características comerciales:

- Empréstitos puros: cuando las obligaciones son emitidas por su valor nominal y los términos amortizativos del empréstito se dedican únicamente al abono de intereses y a la amortización del nominal.
- Empréstitos comerciales: cuando existen pagos adicionales y no se cumplen las condiciones anteriores.

Además, pueden clasificarse atendiendo a la naturaleza del emisor (Estado, organismos públicos, empresas privadas, etc.). Atendiendo a la existencia de garantías, simples si sólo respalda la deuda la solvencia del emisor, y garantizados cuando la deuda se afecta a alguna garantía específica.

En cualquier caso, el estudio de los empréstitos puede abordarse en su doble perspectiva: desde el punto de vista del emisor y desde el punto de vista del obligacionista.

9.2. Los empréstitos desde el punto de vista del emisor

Para la empresa emisora, el empréstito es una forma de financiarse con recursos ajenos. En primer lugar ha de evaluarse el volumen total de financiación que necesita y su distribución entre las diferentes fuentes de financiación. A continuación, se efectúa el diseño de la emisión, determinando el importe total a emitir, número de títulos y nominal de cada uno, así como el momento de la emisión, la duración, la forma de pago de cupones (vencidos acumulados o anticipados), la modalidad de amortización (sorteo, reducción de nominal, etc.).

Además, el emisor ha de plantearse las siguientes cuestiones:

- Qué cuantía ha de dedicar en cada periodo al servicio del empréstito hasta completar su amortización.
- Cuál será la modalidad de amortización y el plan de amortización de los títulos, especificando, en su caso, el número de obligaciones que se amortizan en cada sorteo y las que van quedando en circulación. El plan de amortización está en íntima conexión con la cuantía de los términos amortizativos ya que, con ellos, se atiende al pago de cupones y al reembolso de los títulos que se amortizan.
- A qué tanto efectivo de coste resulta el empréstito. Ello, le permite también comparar el coste de esta fuente de financiación con otras alternativas a las que puede acudir, y también con el rendimiento esperado de los proyectos de inversión que desee acometer, como elementos objetivos en los que basar su decisión.